Н.П. Савенкова, А.Ю. Мокин, В.С. Лапонин

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЙ В ПЛАСТЕ ПРОМЫШЛЕННОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ НЕФТИ

Введение.

Разработка нефтяного месторождения представляет собой область знаний, включающую в себя множество направлений исследования таких, как научно обоснованный выбор систем и технологий разработки месторождения, моделирование и расчет процессов вытеснения нефти из пластов, определение оптимального алгоритма воздействия на пласт, прогнозирование показателей разработки месторождения, а также оптимальное управление разработкой месторождения [1–6]. В настоящее время в России крупные месторождения нефти находятся в поздней стадии разработки с резко падающей добычей. Поэтому дальнейшее развитие нефтяной промышленности требует внедрения новых высокоэффективных технологий, позволяющих повысить нефтеотдачу с целью увеличения добычи нефти из низкопродуктивных и трудноизвлекаемых запасов. Известно, что увеличение нефтеотдачи на 1% равносильно открытию нескольких крупных месторождений, обеспечивающих трёхлетнюю добычу нефти по стране. Развитие новых технологий и новых методов исследования характера протекания внутрипластовых процессов невозможно без применения методов математического моделирования гидродинамических процессов, протекающих в различных пластах залежи нефти с учётом их взаимодействия.

Математическое моделирование позволяет с достаточной степенью точности прогнозировать проектный уровень добычи нефти по месторождению, период стабильной добычи, при котором максимальная и минимальная добычи не отличаются от проектных более, чем на 5% .

Извлечение нефти из пласта осуществляется при помощи группы скважин, нагнетающих в пласт воду и извлекающих из пласта водную субстанцию, содержащую нефть и растворенный газ [5]. При этом число скважин, в зависимости от величины месторождения, колеблется от 1500 до 3000 и более.

Залежи нефти, представляющие собой горную породу, способную вмещать в себя и отдавать при разработке нефть, подлежат предварительной геологоразведке [6]. Геологоразведка даёт данные, характеризующие свойства данного нефтяного пласта, такие как: объём запаса нефти, толщина пласта, проницаемость пласта, вязкость нефти, плотность нефти, объёмный коэффициент нефти, коэффициент сжимаемости, а также пористость коллектора, коэффициент нефте-, водо- и газо-насыщенности, коэффициент проницаемости, коэффициент пьезопроводности пласта и некоторые другие показатели, необходимые для дальнейшего математического моделирования. В силу больших размеров месторождения (десятки километров) и неоднородности пласта по отношению к перечисленным выше его характеристикам, эффективная разработка месторождения становится практически невозможной без проведения предварительного численного эксперимента, имитирующего динамику гидродинамических процессов в пласте и прогнозирующего последствия проведения тех или иных геолого-технических мероприятий (ГТМ) на отдельных скважинах [3].

Один из наиболее известных приближенных методов расчета динамического давления был предложен И.А. Чарным [1]. Развитый И.А. Чарным метод последовательной смены стационарных состояний (ПССС) может применяться в двух вариантах:

1. Для случая прямолинейно-параллельного фильтрационного потока, если приток к галерее осуществляется с постоянным дебитом, или если на галерее поддерживается постоянное забойное давление. В обоих случаях выведены аналитические формулы для расчёта давления в одномерном случае по координате x в момент времени t.
2. Для плоскорадиального фильтрационного потока в случае притока к скважине с постоянным дебитом или в случае притока к скважине, на которой поддерживается постоянное давление. Здесь также выведены аналитические формулы для расчёта давления по радиусу r в момент времени t.

Заметим, что в описанных выше вариантах, математическое моделирование проводится для идеального месторождения, при котором скважины расположены строго по прямой полосе или по радиусу. В реальности на конкретном рельефе местности по разным причинам это практически невозможно осуществить. Более того, практически невозможно поддерживать на скважинах одно и то же постоянное давление и, тем более, обеспечивать постоянный дебит.

Необходимо также отметить, что часто при разработке полуэмперических формул для расчета воронок депрессий и репрессий используются полученные экспериментально характеристики пласта, соответствующие конкретному месторождению. Поэтому на других месторождениях эти расчётные формулы являются практически неприменимыми.

Таким образом возникает необходимость проводить высокоадекватное математическое моделирование в криволинейной области с произвольным распределением большого числа нагнетающих и добывающих скважин. Заметим, что разработка трёхмерных математических моделей в настоящее время не представляется целесообразной в связи с отсутствием соответствующих данных геологоразведки. Поэтому ниже представлена двумерная математическая модель [7–10].

Математическая постановка задачи.

Рассматривается конкретное нефтяное месторождение, геометрические контуры которого можно вписать в прямоугольник со сторонами 20км и 30км. Известна локализация нагнетающих и добывающих скважин на этом месторождении. Общее число скважин на месторождении 1500. Диаметр каждой скважины – 15см. Считаются известными дебиты на каждой добывающей скважине, и расходы на каждой нагнетающей скважине. Давление на границе месторождения, пластовое давление, а также вязкость выкачиваемой жидкости, коэффициент проницаемости коллектора и характерная толщина пласта задаются как результаты геологоразведки. Конечно, все эти величины зависят от координат (x, y). Более того, геологоразведка показывает, что существуют подземные барьеры, непроницаемые преграды для жидкости, которые жидкость вынуждена огибать, как препятствие. Естественно считать, что на барьерах коэффициент проницаемости равен нулю. Математическая постановка заключается в решении двумерного уравнения фильтрации относительно неизвестного давления $u(x, y)$ в криволинейной области D с барьерами, представляющей собой задачу Дирихле для уравнения Пуассона вида

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F(x,y), \quad (x,y)\in D,$$

$$u(x,y)=u_0(x,y), \quad (x,y)\in \partial D.$$

Здесь:

$F(x, y)$ – правая часть, определяющая положение и мощность нагнетающих и добывающих скважин,

$u_0(x, y)$ – известная функция, равная решению на границе области D .

Поскольку выписать аналитическое решение для поставленной выше задачи не представляется возможным, будем решать её разностным методом. По каждому направлению вводится достаточно мелкая равномерная сетка ω (с шагом 25см). В дальнейшем предполагается шаг сетки уменьшить до 5−10см, но это влечет сильное увеличение времени расчета. Проводится аппроксимация дифференциального уравнения разностным уравнением со вторым порядком по каждому из направлений [11]. Однако самые большие градиенты давления естественно ожидать в непосредственной близости от скважины, поэтому целесообразно вводить неравномерную сетку с шагом 1−2см у скважины и с шагами 1м и более между скважинами. При этом порядок аппроксимации уменьшается до первого, но погрешность решения по абсолютной величине существенно не меняется, а количество узлов расчетной сетки значительно уменьшается. Ниже приводится пятиточечная схема, аппроксимирующая задачу Дирихле для уравнения Пуассона на неравномерной сетке с первым порядком точности:

$$-\frac{1}{\overline{h}_i^{(1)}}\left(\frac{p_{i+1,j}-p_{i,j}}{h_i^{(1)}}-\frac{p_{i,j}-p_{i-1,j}}{h_{i-1}^{(1)}}\right)-\frac{1}{\overline{h}_j^{(2)}}\left(\frac{p_{i,j+1}-p_{i,j}}{h_j^{(2)}}-\frac{p_{i,j}-p_{i,j-1}}{h_{j-1}^{(2)}}\right)=F(x_{i,j})$$

во всех внутренних узлах сетки и $p_{i,j}=u_0(x_{i,j})$ в граничных узлах. Здесь $h_i^{(1)},h_j^{(2)}$ − шаги сетки в узле $x_{i,j}$, $\overline{h}_i^{(1)}=\dfrac{h_i^{(1)}-h_{i-1}^{(1)}}{2}$, $\overline{h}_j^{(2)}=\dfrac{h_j^{(2)}-h_{j-1}^{(2)}}{2}$.

Численный метод решения.

К методу вычисления приближённого решения разностной схемы предъявляются три основных требования:

1. Возможность применения метода в случае неравномерной и нерегулярной сетки.
2. Высокая скорость сходимости метода. Количество итераций для достижения заданной точности должно быть существенно меньше размера сетки.
3. Возможность распараллеливания метода на вычислительных комплексах с распределённой памятью.

В настоящей работе для решения поставленной задачи используются метод скорейшего спуска, а также его модификация − метод сопряженных градиентов. На неравномерных сетках оба метода применяются с диагональным предобуславливанием Якоби [11].

Определим во множестве функций, заданных на сетке ω и равных нулю в граничных узлах этой сетки, скалярное произведение $(u,v)=\sum\limits_{x_{i,j}\in\omega}\overline{h}_i^{(1)}\overline{h}_j^{(2)}u(x_{i,j})v(x_{i,j})$. Разностная аппроксимация оператора A:

$$(Ap)_i=-\frac{1}{\overline{h}_i^{(1)}}\left(\frac{p_{i+1,j}-p_{i,j}}{h_i^{(1)}}-\frac{p_{i,j}-p_{i-1,j}}{h_{i-1}^{(1)}}\right)-\frac{1}{\overline{h}_j^{(2)}}\left(\frac{p_{i,j+1}-p_{i,j}}{h_j^{(2)}}-\frac{p_{i,j}-p_{i,j-1}}{h_{j-1}^{(2)}}\right),$$

предобуславливателя D : $(Dp)_{i,j}=(2p_{i,j})\left(\dfrac{1}{h_i^{(1)}h_{i-1}^{(1)}}+\dfrac{1}{h_j^{(2)}h_{j-1}^{(2)}}\right)^{-1}$.

В методе скорейшего спуска приближенное решение $p^{(k)}$ вычисляется по формулам $p^{(k+1)}=p^{(k)}-\tau_{k+1}w^{(k)}$, $Dw^{(k)}=r^{(k)}$, где невязка

$r^{(k)} = r^{(k)}(x_{i,j}) = \left(Ap^{(k)}\right)_{i,j} - F(x_{i,j})$ во всех внутренних узлах сетки и $r^{(k)}(x_{i,j}) = 0$ в граничных узлах. Итерационный параметр $\tau_{k+1} = \dfrac{\left(r^{(k)}, w^{(k)}\right)}{\left(Aw^{(k)}, w^{(k)}\right)}$. Начальное приближение $p^{(0)}(x_{i,j})$ во внутренних узлах сетки может принимать любые значения, а в граничных узлах $p^{(0)}(x_{i,j}) = u_0(x_{i,j})$.

В методе сопряженных градиентов первый шаг делается согласно формулам метода скорейшего спуска. Дальнейшие итерации вычисляются по равенству $p^{(k+1)} = p^{(k)} - \tau_{k+1} g^{(k)}$, в котором коэффициент $\tau_{k+1} = \dfrac{\left(r^{(k)}, g^{(k)}\right)}{\left(Ag^{(k)}, g^{(k)}\right)}$. Сеточная функция определена рекуррентно равенствами $g^{(k)} = w^{(k)} - \dfrac{\left(Aw^{(k)}, g^{(k-1)}\right)}{\left(Ag^{(k-1)}, g^{(k-1)}\right)} g^{(k-1)}, \quad k = 1, 2..., \quad g^{(0)} = w^{(0)}$. Здесь, как и ранее, функция поправки $w^{(k)} : Dw^{(k)} = r^{(k)}$, невязка $r^{(k)}\left(x_{i,j}\right) = \left(Ap^{(k)}\right)_{i,j} - F(x_{i,j})$ во всех внутренних узлах сетки и $r^{(k)}(x_{i,j}) = 0$ в граничных узлах.

Распараллеливание указанных выше алгоритмов проводилось на 4096 процессорах на сетках с числом узлов до 60000 по каждому направлению расчётной области [12]. Критерий остановки методов основан на сравнении текущей итерации с предыдущей. Для сходимости к точному решению разностной схемы метод скорейшего спуска требует количество итераций, сравнимое с общим числом узлов сетки. У метода сопряженных градиентов количество итераций пропорционально квадратному корню из общего числа узлов, что хорошо соответствует теоретическим оценкам сходимости.

Результаты численного расчёта.

На рисунке 1 представлено распределение давления для одной нагнетающей и окружающих её четырех добывающих скважин без учета влияния других скважин месторождения. Правая часть уравнения Пуассона вычисляется по известным дебетам этих скважин. При этом на нагнетающей скважине правая часть имеет положительный знак, на добывающих – отрицательный знак. Резко сужающиеся воронки свидетельствуют о высоких градиентах давления вблизи скважин.

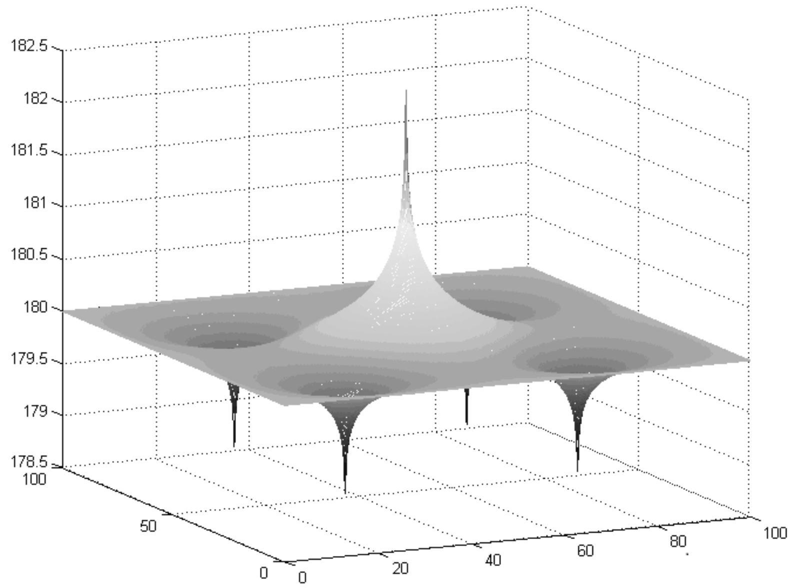

Рис. 1. Результаты расчета давления для одной нагнетающей и четырех добывающих скважин.

На рисунке 2 представлено распределение давления для двух нагнетающих и двух добывающих скважин без учета влияния других скважин месторождения. В реальности расположение нагнетающих и добывающих скважин на месторождении подчиняется определенному порядку. Например, скважины могут быть расположены рядами, образуя галереи.

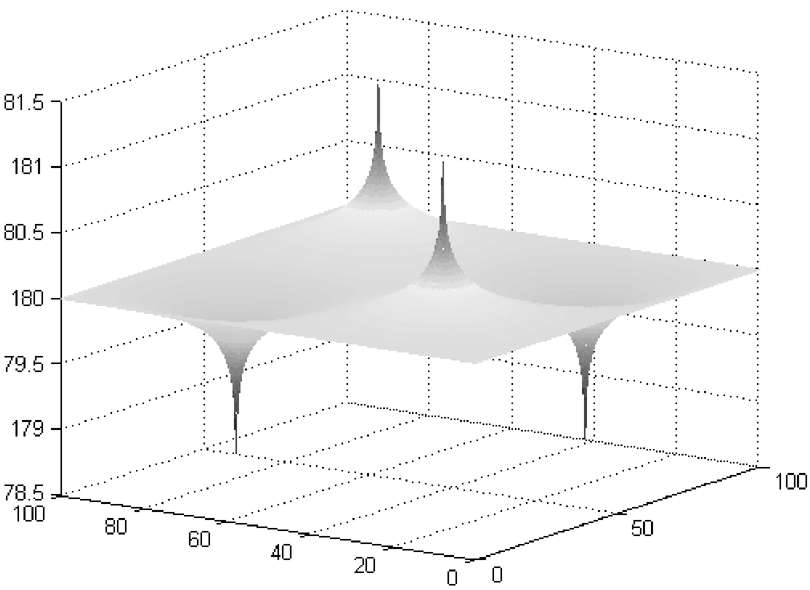

Рис. 2. Результаты расчета давления для двух нагнетающих и двух добывающих скважин.

На рисунках 3, 4 представлены различные фрагменты результатов расчета по конкретному месторождению. На каждом из них отображено более ста нагнетающих и добывающих скважин, для которых известны их дебеты.

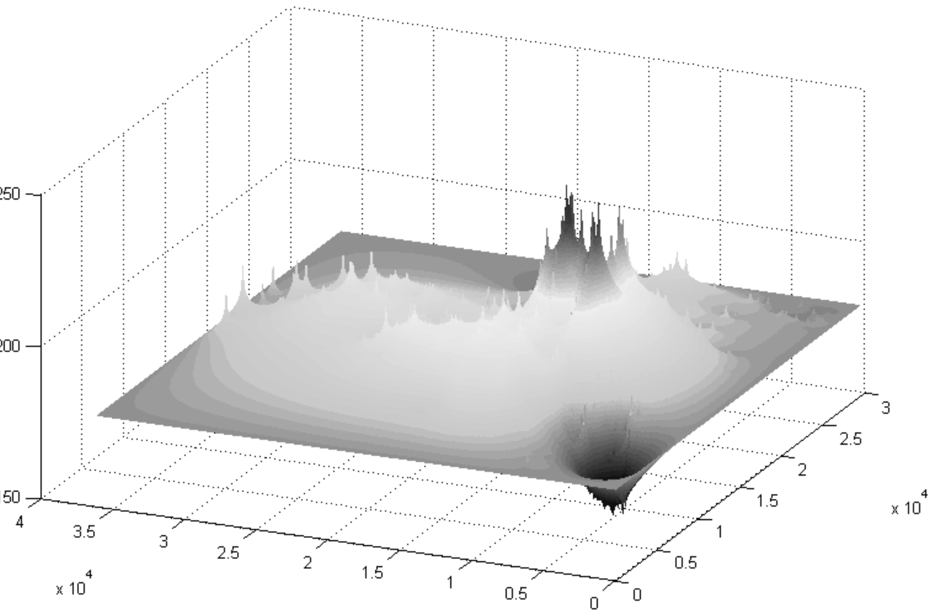

Рис. 3. Расчет по конкретному месторождению.

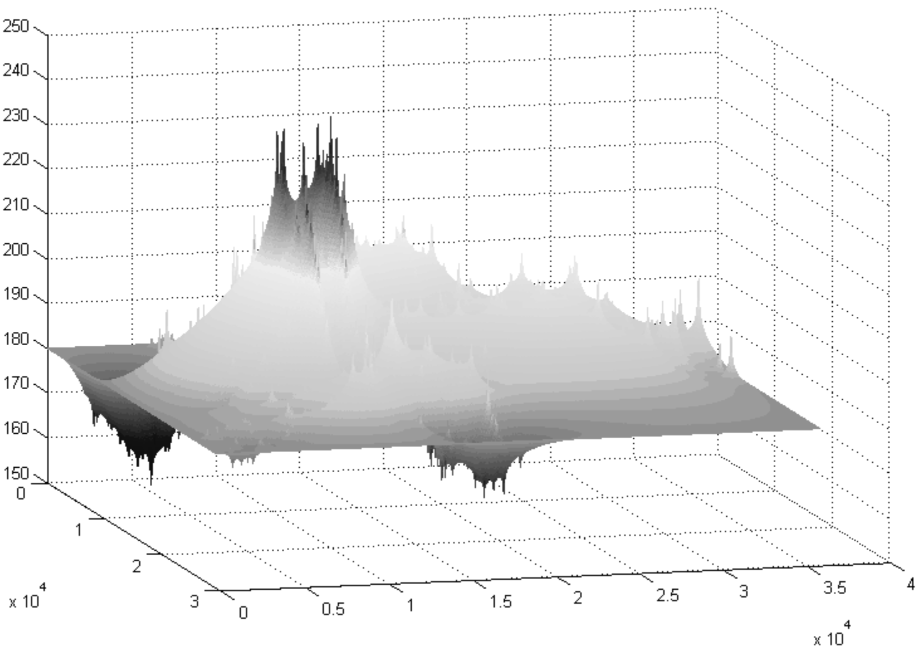

Рис. 4. Расчет по конкретному месторождению.

На рисунке 5 изображены изобарические линии некоторого участка месторождения, полученные в результате численного эксперимента. Четырехзначными числами занумерованы нагнетающие и добывающие скважины. На изобарах указаны давления, величины которых меняются в диапазоне от 110 атм. до 200 атм.

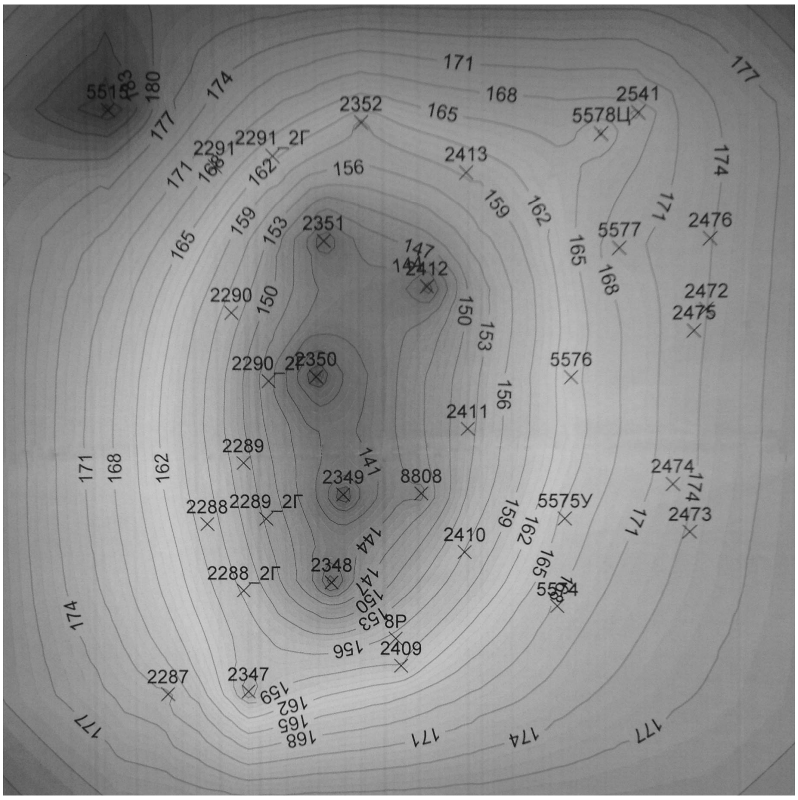

Рис. 5. Изобарические линии.

На рисунке 6 представлена регламентная карта участка месторождения. Номера скважин соответствуют номерам, указанным на рисунке 5.

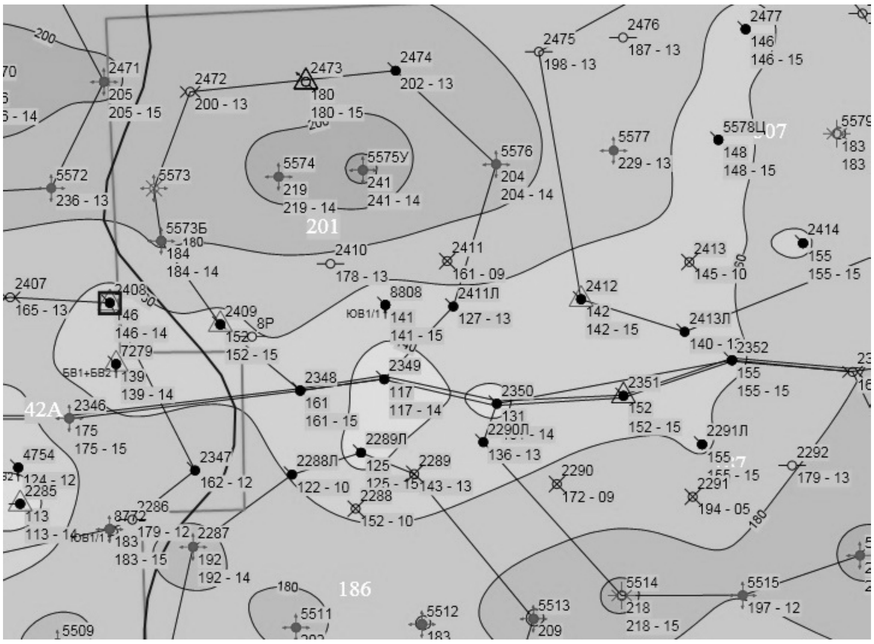

Рис. 6. Регламентная карта.

Из рисунков 5 и 6 видно, что расчетное давление на скважинах и соответствующие им регламентное давление отличается незначительно. В частности, на добывающей скважине 2350 согласно расчетам имеем 130 атм., в то время как регламентное давление на этой скважине составляет 131 атм. На нагнетающей скважине 5515 расчетное давление равно 190 атм., регламентное превосходит расчетное на 7 атмосфер. Расчетная область имеет размеры 20 на 30 километров. Общее число скважин – более полутора тысяч. Расчет проводился на сетке 20000x30000 узлов с шагом 1 метр.

Заключение.

Представленные в работе исследования в перспективе должны быть наполнены конкретным материалом, учитывающим многопластовость месторождения и наличие в пластах горных пород, препятствующих фильтрации жидкости. Особый интерес представляет численное моделирование эффективности проведения на скважинах геолого-технических мероприятий, направленных на повышение кпд добычи, с целью выработки рекомендаций по их применению для конкретных пластов, обладающих специфическими особенностями.

Литература.

1. Чарный И.А. Подземная гидромеханика. - М.; Л.: ОГИЗ — Гостезиздат, 1948, 196с.
2. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика: учебник. - М.: Недра, 1993.
3. Закиров С.Н. Анализ проблемы «Плотность сетки скважин - нефтеотдача». - М.:ИД «Грааль», 2002, 314с.
4. Закиров Э.С. Трехмерные многофазные задачи прогнозирования, анализа и регулирования разработки месторождений нефти и газа. - М.: ИД «Грааль», 2001, 303с.
5. Чернов Б.С., Базлов М.Н. Гидродинамические методы исследования скважин и пластов. - М.: Гостоптехиздат, 1960. 319с.
6. Уметбаев В.Г. Геолого-технические мероприятия при эксплуатации скважин. - М.:Эксплуатация нефтяных месторождений. - Уфа: Башкирское книжное издательство, 1989, С. 5-38.
7. Savenkova N.P., Laponin V.S., A numerical method for finding soliton solutions in nonlinear differential equations // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics, 2013, V. 37, № 2, P. 49-54.

8. Bychkov V.L., Savenkova N.P., Anpilov S.V., Troshchiev Yu.V. Modeling of vorticle objects created in gatchina discharge // *IEEE Transactions on Plasma Science*, 2012, V. 40(12), P. 3158–3161.
9. Yusupaliev U., Savenkova N.P., Troshchiev Yu.V., Shuteev S.A., Skladchikov S.A., Vinke E.E., Gusein-zade N.G. Vortex rings and plasma toroidal vortices in homogeneous unbounded media. II. The study of vortex formation process // Bulletin of the Lebedev Physics Institute, 2011, V. 38, P. 275-282.
10. Yusupaliev U., Savenkova N.P., Shuteev S.A., Skladchikov C.A., Maslov A.K., Elensky V.G. Computer simulation of vortex self-maitenance and amplification // MOSCOW UNIVERSITY PHYSICS BULLETIN, 2013, V. 68, № 4, P. 317-319.
11. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М. «Наука», 1989, 430с.
12. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. - Санкт-Петербург «БХВ-Петербург», 2002, 599с.