С.И. Соловьева

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Работа посвящена построению численного метода решения обратной задачи для полулинейной гиперболической системы уравнений с коэффициентами, зависящими от различных компонент решения. Задача состоит в определении одного из коэффициентов по дополнительной информации о решении системы. Данная задача была изучена в работе [1]. Была доказана теорема существования решения. Доказательство основано на сведении исходной обратной задачи к нелинейному интегро-функциональному уравнению относительно неизвестного коэффициента и последующем применении принципа сжимающих отображений.

Рассмотрим сначала прямую задачу

$$u_x(x,t)+a_t(x,t)=0, \quad (x,t)\in Q_T, \tag{1}$$

$$a_t(x,t)=\beta(u(x,t))(u(x,t)-\psi(a(x,t))), \quad (x,t)\in Q_T, \tag{2}$$

$$u(0,t)=\mu(t), \quad 0\le t\le T, \tag{3}$$

$$a(x,0)=0, \quad 0\le x\le \ell, \tag{4}$$

где $Q_T=\{(x,t): 0\le x\le \ell, 0\le t\le T\}$.

Предположим, что функции $\mu(t), \beta(s), \psi(s)$ удовлетворяют следующим условиям

$$\mu\in C^3[0,T], \quad \mu(0)=0,\ \mu'(t)>0,\ t\in[0,T]; \tag{5}$$

$$\beta\in C^1(R)\cap C^2[0,\mu(T)],\ 0<\beta(s)\le c_\beta, \quad s\in R; \tag{6}$$

$$\begin{gathered}\psi\in C^1(R)\cap C^3[0,\varphi(\mu(T))], \quad \psi(0)=0,\ \lim_{s\to+\infty}\psi(s)>\mu(T),\\ 0<\psi'(s)\le C_\psi,\ s\in R,\end{gathered} \tag{7}$$

где $\varphi(z)$ – функция обратная к $\psi(z)$.

Если условия (5)-(7) выполнены, то существует единственная пара функций $u(x,t)$, $a(x,t)$ (которую будем называть решением задачи (1)-(4)) таких, что $u,a,u_x,a_t\in C[Q_T]$, $u(x,t)$, $a(x,t)$ удовлетворяют (1)-(4) и $u_t(x,t)>0, a_t(x,t)\ge 0, u_x(x,t)\le 0, (x,t)\in Q_T$. Из этих неравенств, уравнения (2) и условий (3)-(4) следует, что для любого $\tau\in(0,T]$ справедливы

* Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (код проекта 02-01-0344).

неравенства $0 \le u(x,t) \le \mu(\tau)$, $0 \le a(x,t) \le \varphi(\mu(\tau))$, $(x,t) \in Q_\tau$. Доказательство этого утверждения приведено в работе [1]. Там же показано, что функции $u(x,t)$ и $a(x,t)$ являются решениями интегральных уравнений

$$u(x,t) = \mu(t)\exp\left\{-\int_0^x \beta(u(z,t))dz\right\} + \\ + \int_0^x \exp\left\{-\int_s^x \beta(u(z,t))dz\right\}\beta(u(s,t))\psi(a(s,t))ds, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{8}$$

$$a(x,t) = \int_0^t \beta(u(x,\tau))(u(x,\tau) - \psi(a(x,\tau)))d\tau, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{9}$$

а для функции $u_t(x,t)$ справедливо следующее представление

$$u_t(x,t) = \mu'(t)\frac{\beta(u(x,t))}{\beta(\mu(t))}\exp\left\{-\int_0^x \beta(u(s,t))ds\right\} + \\ + \beta(u(x,t))\int_0^x \exp\left\{-\int_z^x \beta(u(s,t))ds\right\}\psi'(a(z,t))a_t(z,t)dz, \quad (x,t) \in Q_T. \tag{10}$$

Сформулируем обратную задачу. Требуется определить функцию $\beta(s)$, если известны функции $\mu(t), \psi(s)$, а также функция $g(t)$, такая что

$$u(l,t) = g(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{11}$$

где $u(x,t)$ – решение задачи (1)-(4).

Так как при неизвестной функции $\beta(s)$ неизвестно также и решение задачи (1)-(4), то в дальнейшем под решением обратной задачи будем понимать тройку функций $\beta(s), u(x,t;\beta), a(x,t;\beta)$. Здесь учитывается, что функции $u(x,t;\beta), a(x,t;\beta)$ зависят от функции $\beta(s)$.

Для того чтобы построить численный метод решения обратной задачи положим в (10) $x = l$ и использовав условие (11) получим

$$\beta(\mu(t))\left[g'(t) - \beta(g(t))\int_0^l \exp\left\{-\int_z^l \beta(u(s,t;\beta))ds\right\}\psi'(a(z,t;\beta))a_t(z,t;\beta)dz\right] = \\ = \mu'(t)\beta(g(t))\exp\left\{-\int_0^l \beta(u(s,t;\beta))ds\right\}, \qquad 0 \le t \le T_0. \tag{12}$$

Это нелинейное операторное уравнение относительно неизвестной функции $\beta(s)$. Итерационный метод для его решения можно записать следующим образом

$$\beta_{n+1}(\mu(t)) = \mu'(t)\beta_n(g(t))\exp\left\{-\int_0^l \beta_n(u(s,t;\beta_n))ds\right\}\times$$

$$\left[g'(t) - \beta_n(g(t))\int_0^l \exp\left\{-\int_z^l \beta_n(u(s,t;\beta_n))ds\right\}\psi'(a(z,t;\beta_n))a_t(z,t;\beta_n)dz\right]^{-1} \quad (13)$$

$$0 \le t \le T_0.$$

Для вычисления функций $u(x,t;\beta_n), a(x,t;\beta_n)$ построим другой итерационный процесс, основанный на уравнениях (8), (9)

$$u_k(x,t;\beta_n) = \mu(t)\exp\left\{-\int_0^x \beta_n(u_{k-1}(z,t;\beta_n))dz\right\} +$$
$$+\int_0^x \exp\left\{-\int_s^x \beta_n(u_{k-1}(z,t;\beta_n))dz\right\}\beta_n(u_{k-1}(s,t;\beta_n))\psi(a_k(s,t;\beta_n))ds, \quad (14)$$

$$a_k(x,t;\beta_n) = \int_0^t \beta(u_k(x,\tau;\beta_n))(u_k(x,\tau;\beta_n) - \psi(a_{k-1}(x,\tau;\beta_n)))d\tau, \quad (15)$$

и $u(x,t;\beta_n) = \lim\limits_{k\to\infty} u_k(x,t;\beta_n)$; $\quad a(x,t;\beta_n) = \lim\limits_{k\to\infty} a_k(x,t;\beta_n)$.

Производная $a_t(x,t;\beta_n)$ вычисляется в соответствии с уравнением (2)

$$a_t(x,t;\beta_n) = \beta_n(u(x,t;\beta_n))(u(x,t;\beta_n) - \psi(a(x,t;\beta_n))). \quad (16)$$

Если в уравнении (10) положить $t = 0$, то можно получить значение

$$\beta(0) = \frac{\ln \mu'(0) - \ln g'(0)}{l},$$

которое будем использовать в качестве начального приближения $\beta_0(s)$.

Приведем примеры применения рассмотренного итерационного метода. Вычислительные эксперименты состояли в следующем. Для известных функций $\beta(s), \mu(t), \psi(s)$ решалась задача (1)-(4) и определялась функция $g(t) = u(l,t)$. Далее эта функция использовалась в качестве исходной информации для решения обратной задачи, предложенным выше итерационным методом (13)-(16). Заметим, что в (13) для вычисления $\beta_{n+1}(\mu(t))$ требуется вычисление производной функции $g(t)$. При вычислении данной предварительно проводилась процедура сглаживания с последующим дифференцированием.

Проведенные вычислительные эксперименты подтвердили эффективность предложенного итерационного метода.

На рис.1 приведены результаты восстановления функции $\beta(s) = \dfrac{1}{(t+1)^2}$ при известных функциях $\mu(t) = t,\ \psi(s) = s$ и числах $l = 1, T = 1{,}1$. На сетке 100×100 точек итерационный процесс сходится при восьми итерациях. Точность нахождения значений функции $\beta(s)$ вблизи нуля повышается с увеличением количества точек.

На рис. 2 представлены результаты работы итерационного процесса при тех же функциях $\mu(t), \psi(s)$ в случае, когда после вычисления функции $g(t)$ в нее вносилась погрешность и получалась функция $g_\delta(t)$ такая, что $\max\limits_{t\in[0,T]} |g(t) - g_\delta(t)| \le \delta$ (точность погрешности $\delta = 0{,}01$). Далее именно функция $g_\delta(t)$ использовалась для восстановления $\beta(s) = arctg(2t) + 1$.

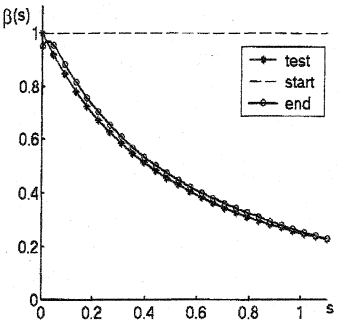

Рис.1

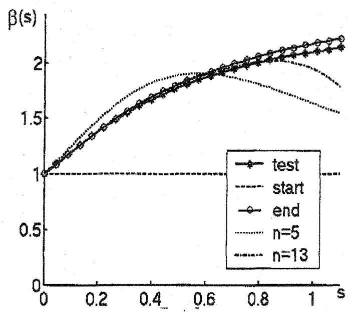

Рис. 2

Литература

1. А.М. Денисов. Теорема существования решения обратной задачи для полулинейной гиперболической системы. Дифференциальные уравнения, 2004, т.40, № 3, с.1155-1165.