А.И. Соловьев

ЧАСТИЧНОЕ ХЕДЖИРОВАНИЕ ПЛАТЕЖНЫХ ОБЯЗАТЕЛЬСТВ АМЕРИКАНСКОГО ТИПА НА ДИСКРЕТНОМ РЫНКЕ

1. Введение

На финансовых рынках инвестору достаточно часто нужно иметь большой капитал, чтобы хеджировать обязательство в полном объёме. Вкладывая меньший капитал, инвестор принимает на себя риск неполного (или частичного) хеджирования. Особенность обязательства американского типа состоит в том, что оно может быть предъявлено к оплате в любой момент времени. В связи с этим, в задачах хеджирования американского обязательства элементами случайности являются и поведение рынка, и момент предъявления.

Частичное хеджирование называется эффективным [1], если инвестор использует стратегии двух типов. К первому типу относятся стратегии квантильного хеджирования, позволяющие с максимально возможной вероятностью хеджировать обязательство полностью. Такие стратегии не учитывают отношение инвестора к риску в отличие от стратегий второго типа, минимизирующих функцию потерь от неполного хеджирования.

Задачи эффективного хеджирования обязательств европейского типа на дискретных рынках исследовались в [2]. Предложены различные варианты декомпозиции задач, а также метод динамического программирования для нахождения цены обязательства и построения хеджирующей стратегии. Описанная в [2] модель рынка используется в настоящей работе. В [3] сформулированы задачи эффективного хеджирования американских обязательств для рынков с дискретным временем и бесконечным числом состояний. Также поставлены задачи минимизации начальной стоимости портфеля с фиксированным уровнем эффективного хеджирования. Показано существование решения задач.

В п. 3 все поставленные задачи эффективного хеджирования сведены к задачам линейного программирования. Приведены примеры, в которых целевые функции задач не имеют седловых точек.

В работе [4] задача минимизации стоимости начального портфеля рассматривалась при ограничении снизу вероятности полного хеджирования в условиях полного рынка с двумя активами. При этом предполагалось, что обязательство не предъявляется до оптимального для покупателя момента времени. С учётом этого ограничения, но для более общей модели рынка, оптимальные хеджирующие стратегии найдены в [5].

Эта проблема изучается в п. 4. Приведены эквивалентные формы задачи для неполного и полного рынков, удобные для поиска оптимальных стратегий. Показано, что применение смешанных стратегий продавцом сводится к решению задачи эффективного хеджирования.

2. Описание модели

На рынке торгуют ценными бумагами $d+1$ видов. Будем считать 0-ю бумагу безрисковой, а ее стоимость, принимающую только положительные значения, примем за единицу измерения остальных бумаг. Приведённая стоимость бумаг описывается неотрицательным вектором $Z_n = \left(Z_n^0,\ldots,Z_n^d\right)$, зависящим от состояния *n*. Его нулевая компонента равна 1 по условию дисконтирования.

Множество состояний $\mathcal{N}$ имеет структуру дерева. Оно разбито на попарно непересекающиеся подмножества $\mathcal{N}_t$, содержащие состояния, в которые рынок может перейти в момент времени $t=0,\ldots,T$. Множество $\mathcal{N}_0$ состоит из корневой вершины дерева, обозначаемой 0. Пусть $a(n)$ обозначает единственную вершину из множества $\mathcal{N}_{t-1}$, предшествующую вершине $n\in \mathcal{N}_t$, $t=1,\ldots,T$, $a^2(n)=a(a(n))$ и т.д. Положим также $a^0(n)=n$. Множество всех прямых потомков вершины $n\in \mathcal{N}_t$ обозначим через $\mathcal{C}(n)\subset \mathcal{N}_{t+1}$, $t=0,\ldots,T-1$. Рынок моделируется деревом без самопересечений. Каждой концевой вершине (листу) дерева $n\in \mathcal{N}_T$ соответствует единственный путь $\omega=\left(n_0,\ldots,n_T\right)$, где $n_t\in \mathcal{N}_t$, $n_0=0$, $n_T=n$, ведущий к ней из корневой вершины. Эти пути образуют вероятностное пространство элементарных событий Ω.

Вероятностная мера $\mathbb{P}$ на Ω приписывает листьям дерева вероятности $p_n>0$, $\sum\limits_{n\in\mathcal{N}_T} p_n=1$, и вероятности $p_n=\sum\limits_{m\in\mathcal{C}(n)} p_m$ каждой промежуточной вершине $n\in \mathcal{N}_t$, $t=T-1,\ldots,0$. При этом $p_0=1$. Будем считать, что мера $\mathbb{P}$ задает истинные (статистические) вероятности событий. Она однозначно определяется по вероятностному распределению $p_T=\left\{p_n\right\}_{n\in\mathcal{N}_T}$.

Вероятностная мера $\mathbb{Q}=\left\{q_n\right\}_{n\in\mathcal{N}}$, эквивалентная $\mathbb{P}$ ($q_n>0$ $\forall n\in\mathcal{N}_T$), называется мартингальной, если $q_nZ_n=\sum\limits_{m\in\mathcal{C}(n)} q_mZ_m \quad \forall n\in\mathcal{N}_t$, $t=0,\ldots,T-1$. При этом процесс приведенной стоимости каждой j-й бумаги $Z^j=\left\{Z_t^j\right\}$ является $\mathbb{Q}$-мартингалом, т.е.

$$Z_n^j=\mathrm{E}_{\mathbb{P}}\left[Z_{t+1}^j\middle|n\right]=\sum_{m\in\mathcal{C}(n)}\left(\frac{p_m}{p_n}\right)Z_m^j \quad \forall n\in\mathcal{N}_t,\ t=0,\ldots,T-1.$$

Будем рассматривать безарбитражные рынки, для которых мартингальная мера существует. При этом для полных рынков она единственна [6, теорема 1.40].

Далее определяются антагонистические игры с двумя участниками: продавцом обязательства (или инвестором) и его покупателем. Опишем их стратегии.

Портфель инвестора в состоянии $n \in \mathcal{N}$ определяется вектором $\theta_n = \left(\theta_n^0, \ldots, \theta_n^d\right)$, где θ_n^j – количество бумаг j-го вида. Его приведенная стоимость равна $V_n = Z_n \cdot \theta_n$ (скалярное произведение векторов Z_n и θ_n). Будем рассматривать портфельный процесс $\theta = \{\theta_t\}$, где значениями случайной величины $\theta_t = \{\theta_n\}_{n \in \mathcal{N}_t}$ являются портфели, формируемые в момент t. Таким образом, в нулевой момент инвестор приобретает начальный портфель θ_0, затем в состоянии $n \in \mathcal{N}_1$ он формирует портфель θ_n, продавая одни бумаги и покупая другие, и т.д.

Стратегией инвестора называется портфельный процесс θ, удовлетворяющий условию самофинансирования

$$Z_n \cdot \theta_n = Z_n \cdot \theta_{a(n)} \ \forall n \in \mathcal{N}_t,\ t = 1, \ldots, T.$$

Условие самофинансирования означает, что инвестор не тратит деньги и не получает дополнительные суммы извне. Обозначим за $Y_n = Z_n - Z_{a(n)}$, $n \in \mathcal{N}_t$, $t = 1, \ldots, T$, приращения вектора стоимостей ценных бумаг. Величина $Y_n \cdot \theta_{a(n)}$ является приведенной прибылью, получаемой инвестором от портфеля $\theta_{a(n)}$ в состоянии n.

Стратегии θ соответствует процесс стоимостей $V = \{V_t\}$ входящих в нее портфелей. Случайная величина V_t принимает значения V_n и определяется для страгегии θ по следующей формуле [6, предложение 5.7]:

$$V_n = V_0 + \sum_{s=1}^{t} Y_{a^{s-1}(n)} \cdot \theta_{a^s(n)} \ \forall n \in \mathcal{N}_t,\ t = 1, \ldots, T.$$

Эти равенства будут использоваться в задачах для описания зависимости стоимости портфеля от стратегии. Для удобства записи обозначим через $(Y\theta)_n$ сумму $\sum_{s=1}^{t} Y_{a^{s-1}(n)} \cdot \theta_{a^s(n)}$, $n \in \mathcal{N}_t$, $t = 1, \ldots, T$, и $(Y\theta)_0 = 0$.

В данной работе рассматриваются только стратегии продавца, гарантирующие неотрицательность процесса V. Из безарбитражности рынка следует, что условие неотрицательности достаточно потребовать только для $n \in \mathcal{N}_T$ [2, с. 1406].

Обязательство американского типа задается неотрицательным процессом $F = \{F_t\}$, в котором случайная величина F_t принимает дисконтированные значения F_n с вероятностью p_n, $n \in \mathcal{N}_t$, $t = 0, \ldots, T$.

Стратегией покупателя является момент остановки – функция $\tau\colon \Omega \to \{0, \ldots, T\}$, для которой $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$, $t = 0, \ldots, T$, где $\mathcal{F}_t$ – алгебра событий, которые могут наблюдаться вплоть до момента t. Остановка заключается в предъявлении обязательства к оплате.

Для каждого события $\omega = (n_0, \dots, n_T) \in \Omega$ момент τ сопоставляет единственную вершину $n_{\tau(\omega)} \in \mathcal{N}$, где происходит остановка. Множество таких состояний обозначим за $\mathcal{N}_\tau$.

Множество стратегий покупателя очень быстро растёт с увеличением T. Число моментов остановки можно определить рекурсивно. Пусть K_n – число моментов остановки для поддерева с вершиной n исходного дерева. Тогда

$$K_n = 1 \ \ \forall n \in \mathcal{N}_T, \ K_n = 1 + \prod_{m \in \mathcal{C}(n)} K_m \ \ \forall n \in \mathcal{N}_t, \ t = T-1, \dots, 0.$$

Стратегия продавца θ называется хеджирующей обязательство F в момент предъявления τ, если соответствующий процесс V удовлетворяет условию $V_n \geq F_n \ \ \forall n \in \mathcal{N}_\tau$.

Согласно [6, следствие 7.9] для хеджирования обязательства F при любом поведении покупателя достаточно иметь начальный портфель стоимости $U_0^\uparrow(F) = \sup\limits_{\mathbb{Q}} \max\limits_{\tau} \mathrm{E}_{\mathbb{Q}} F_\tau$. Это наименьшая сумма, необходимая для полного хеджирования обязательства. Предположим, что продавец принимает решение вложить меньшую сумму, принимая на себя риск неполного хеджирования обязательства. Далее будем считать, что начальный капитал продавца $v < U_0^\uparrow(F)$.

3. Эффективное хеджирование

Пусть $\psi = \{\psi_t\}$ – процесс, в котором случайная величина ψ_t принимает значения $\psi_n \in [0,1]$, равные долям обязательства F, хеджируемого в вершинах $n \in \mathcal{N}_t$, $t = 0, \dots, T$. Положим $\psi F = \{\psi_t F_t\}$ и рассмотрим задачу максимизации гарантированной величины ожидаемой доли хеджируемого обязательства:

$$\min_\tau \mathrm{E}_{\mathbb{P}} \psi_\tau \to \max_\psi$$

$$U_0^\uparrow(\psi F) = \sup_{\mathbb{Q}} \max_\tau \mathrm{E}_{\mathbb{Q}} \psi_\tau F_\tau \leq v, \ 0 \leq \psi_n \leq 1, \ n \in \mathcal{N}.$$

Согласно рассуждениям в конце п. 2 условие ограниченности цены обязательства $U_0^\uparrow(\psi F) \leq v$ равносильно существованию такой стратегии θ, что $V_n = v + (Y\theta)_n \geq \psi_n F_n \ \ \forall n \in \mathcal{N}$. Поэтому задачу можно преобразовать следующим образом:

$$\min_{\tau} \mathrm{E}_{\mathbb{P}} \psi_\tau \to \max_{(\psi,\theta)}$$
$$\begin{cases} v + (Y\theta)_n \geq \psi_n F_n, \ n \in \mathcal{N}, \\ 0 \leq \psi_n \leq 1, \ n \in \mathcal{N}. \end{cases} \tag{1}$$

Обозначим через X множество допустимых стратегий (ψ,θ) продавца в задаче (1). Сформулируем теорему, позволяющую эквивалентно свести задачу (1) к задаче линейного программирования.

Теорема 1. *В задаче (1) существует максиминная выравнивающая стратегия – такая пара* (ψ^*,θ^*), *что* $\mathrm{E}_{\mathbb{P}}\psi^*_\tau = \psi^*_0 \ \forall \tau$.

Доказательство. Для любой стратегии $(\psi,\theta) \in X$ определим рекурсивно по $t = T,\ldots,0$ процесс $\tilde{\psi} = \{\tilde{\psi}_t\}$:

$$\tilde{\psi}_n = \psi_n \ \ \forall n \in \mathcal{N}_T, \ \tilde{\psi}_n = \min\left\{\psi_n, \ \mathrm{E}_{\mathbb{P}}\left[\tilde{\psi}_{t+1} \middle| n\right]\right\} \ \ \forall n \in \mathcal{N}_t, \ t = T-1,\ldots,0.$$

Процесс $\tilde{\psi}$ аналогичен огибающей Снелла [6] и является субмартингалом, так как $\tilde{\psi}_n \leq \mathrm{E}_{\mathbb{P}}\left[\tilde{\psi}_{t+1} \middle| n\right] \ \ \forall n \in \mathcal{N}_t, \ \ t = 0,\ldots,T-1$. Кроме того, $0 \leq \tilde{\psi}_n \leq \psi_n \ \ \forall n \in \mathcal{N}$, и $\min\limits_{\tau} \mathrm{E}_{\mathbb{P}}\psi_\tau = \min\limits_{\tau} \mathrm{E}_{\mathbb{P}}\tilde{\psi}_\tau = \tilde{\psi}_0$.

Запишем разложение Дуба процесса $\tilde{\psi}$: $\tilde{\psi} = \tilde{\tilde{\psi}} + \varphi$, где процесс $\tilde{\tilde{\psi}}$ – $\mathbb{P}$-мартингал, а процесс φ определяется рекурсивно:

$$\varphi_0 = 0, \ \varphi_k = \varphi_n + \mathrm{E}_{\mathbb{P}}\left[\tilde{\psi}_{t+1} \middle| n\right] - \tilde{\psi}_n \ \ \forall k \in \mathcal{C}(n), \ n \in \mathcal{N}_t, \ t = 0,\ldots,T-1.$$

Из субмартингальности $\tilde{\psi}$ следует неубывание процесса φ, тогда $0 \leq \tilde{\tilde{\psi}}_n \leq \tilde{\psi}_n \leq \psi_n \ \ \forall n \in \mathcal{N}$. Отсюда следует, что $\left(\tilde{\tilde{\psi}},\theta\right) \in X$. Далее, $\varphi_0 = 0$ влечёт $\tilde{\tilde{\psi}}_0 = \tilde{\psi}_0 = \min\limits_{\tau} \mathrm{E}_{\mathbb{P}}\psi_\tau$, а для мартингала $\tilde{\tilde{\psi}}$ выполнены равенства $\tilde{\tilde{\psi}}_0 = \mathrm{E}_{\mathbb{P}}\tilde{\tilde{\psi}}_\tau \ \forall \tau$. Тогда нахождение $\max\limits_{(\psi,\theta)\in X} \min\limits_{\tau} \mathrm{E}_{\mathbb{P}}\psi_\tau$ сводится к решению следующей задачи:

$$\mathrm{E}_{\mathbb{P}}\psi_T \to \max_{(\psi,\theta)}$$
$$\begin{cases} v + (Y\theta)_n \geq \psi_n F_n, \ n \in \mathcal{N}, \\ p_n \psi_n = \sum\limits_{k \in \mathcal{C}(n)} p_k \psi_k, \ n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T, \\ 0 \leq \psi_n \leq 1, \ n \in \mathcal{N}. \end{cases} \tag{1$'$}$$

Оптимальное решение (ψ^*,θ^*) задачи (1′) является максиминной выравнивающей стратегией в задаче (1). ■

Утверждение теоремы 1 верно также для задачи минимизации потерь от неполного хеджирования обязательства американского типа:

$$\max_{\tau} \mathrm{E}_{\mathbb{P}} \left(F_\tau - V_\tau \right)^+ \to \min_{(V,\theta)}$$
$$V_n = v + (Y\theta)_n \geq 0,\ n \in \mathcal{N},$$

где $a^+ = \max\{a, 0\}$, $a \in \mathbb{R}$.

Введём вспомогательные переменные ξ_n, $n \in \mathcal{N}$, и сведём задачу к следующей:

$$\max_{\tau} \mathrm{E}_{\mathbb{P}} \xi_\tau \to \min_{(\xi,V,\theta)}$$
$$\begin{cases} V_n = v + (Y\theta)_n \geq 0,\ n \in \mathcal{N}_T, \\ \xi_n \geq F_n - V_n,\ \xi_n \geq 0,\ n \in \mathcal{N}. \end{cases} \tag{2}$$

Сформулируем две задачи минимизации начального вложения: одна с фиксированным уровнем доли хеджируемого обязательства, а другая с фиксированным уровнем потерь. Пусть константа $\alpha \in [0,1]$ обозначает минимально допустимую ожидаемую долю хеджируемого обязательства, а константа $\beta \geq 0$ – максимально допустимый уровень потерь от неполного хеджирования. Тогда эти задачи имеют следующий вид:

$$V_0 \to \min_{(\psi,V,\theta)}$$
$$\begin{cases} V_n = V_0 + (Y\theta)_n \geq \psi_n F_n,\ n \in \mathcal{N}, \\ 0 \leq \psi_n \leq 1,\ n \in \mathcal{N}, \\ \mathrm{E}_{\mathbb{P}} \psi_\tau \geq \alpha,\ \forall \tau. \end{cases} \tag{3}$$

$$V_0 \to \min_{(\xi,V,\theta)} \qquad \text{или} \qquad V_0 \to \min_{(\xi,V,\theta)}$$
$$\begin{cases} V_n = V_0 + (Y\theta)_n \geq 0,\ n \in \mathcal{N}, \\ \mathrm{E}_{\mathbb{P}} \left(F_\tau - V_\tau \right)^+ \leq \beta,\ \forall \tau, \end{cases} \qquad \begin{cases} V_n = V_0 + (Y\theta)_n \geq 0,\ n \in \mathcal{N}, \\ \xi_n \geq F_n - V_n,\ \xi_n \geq 0,\ n \in \mathcal{N}, \\ \mathrm{E}_{\mathbb{P}} \xi_\tau \leq \beta,\ \forall \tau. \end{cases} \tag{4}$$

Следствие 1. *В задаче (2) существует минимаксная выравнивающая стратегия, эта стратегия – оптимальное решение задачи (2′):*

$$\mathrm{E}_{\mathbb{P}} \xi_T \to \min_{(\xi,V,\theta)}$$
$$\begin{cases} V_n = v + (Y\theta)_n \geq 0,\ n \in \mathcal{N}, \\ \xi_n \geq F_n - V_n,\ \xi_n \geq 0,\ n \in \mathcal{N}, \\ p_n \xi_n = \sum\limits_{k \in \mathcal{C}(n)} p_k \xi_k,\ n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T. \end{cases} \tag{2′}$$

Следствие 2. *Задачи (3) и (4) соответственно эквивалентны задачам (3′) и (4′).*

$$V_0 \to \min_{(\psi,V,\theta)} \qquad\qquad V_0 \to \min_{(\xi,V,\theta)}$$

$$\begin{cases} V_n = V_0 + (Y\theta)_n \ge \psi_n F_n,\ n \in \mathcal{N}, \\ 0 \le \psi_n \le 1,\ n \in \mathcal{N}, \\ \psi_0 = \alpha, \\ p_n \psi_n = \sum\limits_{k \in \mathcal{C}(n)} p_k \psi_k,\ n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T. \end{cases} \quad (3') \qquad \begin{cases} V_n = V_0 + (Y\theta)_n \ge 0,\ n \in \mathcal{N}, \\ \xi_n \ge F_n - V_n,\ \xi_n \ge 0,\ n \in \mathcal{N}, \\ \xi_0 = \beta, \\ p_n \xi_n = \sum\limits_{k \in \mathcal{C}(n)} p_k \xi_k,\ n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T. \end{cases} \quad (4')$$

Доказательство следствий аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание. Для решения задач $(1')$ и $(2')$ можно воспользоваться принципом декомпозиции Данцига-Вульфа [7]. Непосредственно применить его к задачам нельзя из-за наличия связывающих ограничений. На примере задачи $(1')$ покажем, как можно преобразовать её для декомпозиции. Она эквивалентна следующим задачам:

$$\max_{(\psi,\theta)\in X} \min_{\tau} \mathrm{E}_{\mathbb{P}} \psi_\tau = \max_{(\psi_T,\theta)\in X_1} \mathrm{E}_{\mathbb{P}} \psi_T = \min\left\{ \frac{v}{F_0},\ \max_{(\psi_T,\theta)\in X_2} \mathrm{E}_{\mathbb{P}} \psi_T \right\},$$

где

$$X_2 = \left\{ (\psi_T, \theta) \middle|\ v + (Y\theta)_n \ge \mathrm{E}_{\mathbb{P}} \left[\psi_T \middle| n \right] F_n,\ n \in \mathcal{N} \setminus \{0\},\ 0 \le \psi_n \le 1,\ n \in \mathcal{N}_T \right\},$$

$$X_1 = \left\{ (\psi_T, \theta) \in X_2 \middle|\ v \ge \mathrm{E}_{\mathbb{P}} \psi_T F_0 \right\}.$$

Действительно, по теореме 1 найдётся оптимальное решение $\left(\psi^*, \theta^*\right)$ задачи (1), такое, что процесс ψ^* является мартингалом. Поэтому можно избавиться от переменных ψ_n, $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$, используя эквивалентное определение мартингала $\psi_n = \mathrm{E}_{\mathbb{P}} \left[\psi_T \middle| n \right]$ $\forall n \in \mathcal{N}$. Декомпозиция применима к задаче $\max\limits_{(\psi_T,\theta)\in X_2} \mathrm{E}_{\mathbb{P}} \psi_T$. Связывающими переменными в данном случае являются компоненты вектора θ_0. На практике наиболее удобно решать задачу в виде записанного выше минимума, так как в таком виде задача имеет наименьшее возможное число переменных и ограничений.

Целевые функции задач (1) и (2) всегда имеют седловую точку в однопериодной модели рынка $(T = 1)$, но уже для двухпериодной модели это не всегда так. В работе [3] это было показано для задачи (1) в модели рынка Кокса-Росса-Рубинштейна. Здесь мы приведем примеры для общей двухпериодной модели.

Пусть $d = 1$, $T = 2$, и $\mathcal{C}(0) = \{1,2\}$, $\mathcal{C}(1) = \{3,4\}$, $\mathcal{C}(2) = \{5,6\}$. Приведённое обязательство $F = \left(F_0, \ldots, F_6\right) = (2,2,8,2,2,8,10)$. Для задачи (1) положим $v = 3$, $Z^1 = \left(Z_0^1, \ldots, Z_6^1\right) = (3,2,6,1,4,4,7)$, $p_T = \left(p_3, p_4, p_5, p_6\right) = \left(1/12, 1/6, 1/2, 1/4\right)$. Тогда

$$\min_{\tau}\max_{(\psi,\theta)\in X} \mathrm{E}_{\mathbb{P}}\psi_\tau = 7/8 > 47/54 = \max_{(\psi,\theta)\in X}\min_{\tau} \mathrm{E}_{\mathbb{P}}\psi_\tau .$$

Для задачи (2) при следующем наборе параметров: $v=4$, $Z^1=(3,2,4,1,3,2,5)$, $p_T=(1/6,1/6,1/2,1/6)$

$$\min_{(\xi,V,\theta)\in X'}\max_{\tau} \mathrm{E}_{\mathbb{P}}\xi_\tau = 14/15 > 5/6 = \max_{\tau}\min_{(\xi,V,\theta)\in X'} \mathrm{E}_{\mathbb{P}}\xi_\tau ,$$

где X' – множество допустимых троек (ξ,V,θ) в задаче (2).

Решения в смешанных стратегиях антагонистических игр $\Gamma^{(1)}=\langle X,\{\tau\},\mathrm{E}_{\mathbb{P}}\psi_\tau\rangle$ и $\Gamma^{(2)}=\langle X',\{\tau\},\mathrm{E}_{\mathbb{P}}\xi_\tau\rangle$ существуют всегда. При этом значения игр равны $v^{(1)}=\max_{(\psi,\theta)\in X}\min_{\tau}\mathrm{E}_{\mathbb{P}}\psi_\tau$ и $v^{(2)}=\min_{(\xi,V,\theta)\in X'}\max_{\tau}\mathrm{E}_{\mathbb{P}}\xi_\tau$ соответственно. Это утверждение следует из [8, теоремы 5.3 и 5.4]. Действительно, целевые функции задач линейны соответственно по ψ и ξ при фиксированном τ. Множество стратегий покупателя конечно. Множество таких ψ, для которых найдётся стратегия θ, что $(\psi,\theta)\in X$, выпукло и является компактом евклидова пространства. Аналогичное множество всех ξ, для которых найдётся такая пара (V,θ), что $(\xi,V,\theta)\in X'$, выпукло, но не компактно. Но без ограничения общности можно считать это множество компактным, так как задача (2) – это задача на минимум и $\xi_n\ge 0$ $\forall n\in\mathcal{N}$.

Оптимальными смешанными стратегиями покупателя обязательства будут следующие. В задаче (1) – при переходе рынка в состояние 1 немедленно предъявлять обязательство, при переходе рынка в состояние 2 предъявлять сразу с вероятностью $2/27$ и в следующий момент времени с вероятностью $25/27$. В задаче (2) поведение то же, только вероятности соответственно равны $1/5$ и $4/5$.

4. Хеджирование с фиксированной вероятностью

В задаче (1) имеется следующий недостаток: в большинстве случаев оптимальной стратегией продавца является хеджирование неполного обязательства, то есть вероятность хеджировать обязательство целиком, действуя оптимально, невелика. В данном пункте рассматривается постановка задачи частичного хеджирования, устраняющая этот недочёт. Она выглядит следующим образом:

$$V_0 \to \min_{(V,\theta)}$$

$$\begin{cases} V_n = V_0 + (Y\theta)_n \ge 0,\ n\in\mathcal{N}, \\ \mathbb{P}(V_\tau \ge F_\tau) \ge 1-\varepsilon,\ \forall\tau. \end{cases}$$

Последнее ограничение показывает, что, каким бы ни был момент остановки, обязательство должно быть хеджировано полностью с вероятностью, не меньшей $1-\varepsilon$, где $\varepsilon \in [0,1]$ – заданный уровень значимости.

Таким образом, при определении своей стратегии продавец решает, в каких состояниях рынка он хеджирует обязательство целиком, а в каких – нет. При этом во всех состояниях, где намечено неполное хеджирование, достаточно потребовать только выполнения условия допустимости стратегии. Введём булевы переменные $x_n \in \{0,1\}$, $n \in \mathcal{N}$, описывающие выбор продавца. Тогда задача будет иметь следующий вид:

$$V_0 \to \min_{(V,\theta,x)}$$

$$\begin{cases} V_n = V_0 + (Y\theta)_n \geq F_n x_n,\ n \in \mathcal{N}, \\ \mathrm{E}_{\mathbb{P}} x_\tau \geq 1-\varepsilon,\ \forall \tau, \\ x_n \in \{0,1\},\ n \in \mathcal{N}. \end{cases} \tag{5}$$

Решение задачи (5) затрудняет большое число ограничений, соответствующих всевозможным моментам остановки τ и наличие булевых переменных.

Теорема 2. *Всегда найдётся такое оптимальное решение (V^*, θ^*, x^*) задачи (5), что x^* удовлетворяет условию монотонности:*

$$x_n^* \geq x_k^* \quad \forall k \in \mathcal{C}(n),\ n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T.$$

Доказательство. Зафиксируем оптимальное решение (V^*, θ^*, x^*) и определим правило остановки τ' для каждого события $\omega = (n_0, \ldots, n_T) \in \Omega$, где $n_t \in \mathcal{N}_t$:

$$\tau'(\omega) = \begin{cases} T, \text{ если } x_{n_t}^* = 1\ \forall n_t \in \omega, \\ \min\{t \mid x_{n_t}^* = 0\}, \text{ иначе.} \end{cases}$$

То есть мы останавливаемся в первом состоянии, в котором $x_n^* = 0$, или в последнем состоянии пути, если остановка не произошла ранее. Заметим, что $\tau' \in Arg\min_\tau \mathrm{E}_{\mathbb{P}} x_\tau^*$.

Для всех состояний $m \in \mathcal{N}$, следующих за $n \in \mathcal{N}_{\tau'}$, можно положить $x_m^* = 0$. Действительно, $V_n^* \geq F_n x_n^* \geq 0$, и значение $\min_\tau \mathrm{E}_{\mathbb{P}} x_\tau^*$ не меняется. Оптимальное значение целевой функции V_0^* также остаётся неизменным. Таким образом, полученный набор x^* оптимален и удовлетворяет условию монотонности. ■

Используя данную теорему, можно упростить задачу (5):

$$V_0 \to \min_{(V,\theta,x)}$$

$$\begin{cases} V_n = V_0 + (Y\theta)_n \geq F_n x_n,\ n \in \mathcal{N}, \\ \mathrm{E}_{\mathbb{P}} x_T \geq 1-\varepsilon, \\ x_n \geq x_k,\ k \in \mathcal{C}(n),\ n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T, \\ x_n \in \{0,1\},\ n \in \mathcal{N}_T. \end{cases} \tag{5$'$}$$

Следствие 3. *Любое оптимальное решение задачи (5′) является оптимальным решением задачи (5).*

Доказательство. По теореме 2 множество допустимых решений задачи (5) можно сузить, добавив условие монотонности по x. Покажем, что, снимая ограничение $x_n \in \{0,1\}$ $\forall n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$, оптимальное значение целевой функции не меняется. Условие $x_n \geq 0$, $n \in \mathcal{N}$, следует из $x_{a^T(n)} \geq \ldots \geq x_{a(n)} \geq x_n \geq 0$ $\forall n \in \mathcal{N}_T$. Если найдётся состояние $n' \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$: $x_{n'} > \max\limits_{k \in \mathcal{C}(n')} x_k$, то можно положить $x_{n'} = \max\limits_{k \in \mathcal{C}(n')} x_k$, уменьшая $x_{n'}$. Действительно, $V_{n'} \geq F_{n'} x_{n'} > F_{n'} \max\limits_{k \in \mathcal{C}(n')} x_k$, $x_{a(n')} \geq x_{n'} > \max\limits_{k \in \mathcal{C}(n')} x_k$. Итак, $x_n = \max\limits_{k \in C(n)} x_k$ $\forall n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$, поэтому $x_n \in \{0,1\}$ $\forall n \in \mathcal{N}$. Уменьшение x не затронуло x_T. Из условия монотонности $\mathrm{E}_{\mathbb{P}} x_\tau \geq \mathrm{E}_{\mathbb{P}} x_T$ для всех τ, поэтому $\mathrm{E}_{\mathbb{P}} x_T = \min\limits_{\tau} \mathrm{E}_{\mathbb{P}} x_\tau \geq 1-\varepsilon$. Таким образом, переход к задаче (5′) обоснован. ■

Для полного рынка можно определить упрощённую форму задачи. Как уже было сказано в п. 2, на полном рынке мартингальная мера единственна. Согласно [6, теорема 5.15] процесс стоимости портфеля V является $\mathbb{Q}$-мартингалом, т.е. стоимость портфелей в состояниях $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$ однозначно определяется из равенств $V_n = \mathrm{E}_{\mathbb{Q}}\left[V_T \middle| n\right]$, $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T$. Поэтому задачу (5′) можно переписать без компонент θ в следующем виде:

$$\mathrm{E}_{\mathbb{Q}} V_T \to \min_{(V_T,x)}$$

$$\begin{cases} \mathrm{E}_{\mathbb{Q}}\left[V_T \middle| n\right] \geq F_n x_n,\ n \in \mathcal{N}, \\ \mathrm{E}_{\mathbb{P}} x_T \geq 1-\varepsilon, \\ x_n \geq x_k,\ k \in \mathcal{C}(n),\ n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_T, \\ x_n \in \{0,1\},\ n \in \mathcal{N}_T. \end{cases}$$

Были проведены численные эксперименты решения задачи в данной форме с использованием системы моделирования GAMS 23.9 и оптимизационной библиотеки SCIP. Для бинарной модели рынка с одним рисковым активом и $T=5$ время расчёта решения с погрешностью 4 % составляет менее 0,5 секунды.

В завершении сделаем важное замечание о применении смешанных стратегий. Предполагается, что, выбирая значение переменной $x_n \in \{0,1\}$, продавец решает: хеджирует ли он обязательство в этом состоянии рынка целиком или нет. Применить смешанную стратегию в данном случае означает выбрать значение $x_n \in \{0,1\}$ как реализацию случайной величины, где $x_n = 1$ с некоторой вероятностью. Пусть $x_n \in [0,1]$ $\forall n \in \mathcal{N}$, тогда переменная x_n задаёт вероятность того, что обязательство хеджируется полностью в состоянии n при условии перехода рынка в это состояние. Но, изменив условие бинарности, в результате получаем задачу (3) при $\alpha = 1-\varepsilon$. То есть решение задачи (5) в смешанных стратегиях есть решение задачи (3).

Литература

1. Föllmer H., Leukert P. Quantile hedging// Finance and Stochastics. 1999. V. 3. N. 3. P. 251–273.
2. Morozov V.V., Soloviev A.I. On optimal partial hedging in discrete markets // Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research. 2013. V. 62. N. 11. P. 1403–1418.
3. Perez-Hernandez L. On the existence of an efficient hedge for an American contingent claim within a discrete time market// Quantitative Finance. 2007. V. 7. N. 5. P. 547–551.
4. Новиков А.А. Хеджирование опционов с заданной вероятностью// Теория вероятностей и ее приложения. 1998. Т. 43. Вып. 1. С. 152-161. (Novikov A.A. Hedging of options with a given probability// Theory of Probability & Its Applications. 1999. V. 43. N. 1. P. 135–143.)
5. Lindberg P. Optimal partial hedging of an American option: shifting the focus to the expiration date// Mathematical Methods of Operations Research. 2012. V. 75. N. 3. P. 221–243.
6. Фёльмер Г. , Шид А. Введение в стохастические финансы. Дискретное время. М.: МЦНМО, 2008. (Föllmer H., Schied A. Stochastic finance: an introduction in discrete time. 2nd ed. Berlin: Walter de Gruyter, 2004.)
7. Dantzig G.B. Linear programming and extensions. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1963.
8. Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики. М.: МАКС Пресс, 2005.