К.С. Сорокин

ГАРАНТИРОВАННОЕ ПО ИСХОДАМ И РИСКАМ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Введение

В статье рассматривается уже ставшая классической линейно-квадратичная динамическая задача, которая, с учетом требований, проистекающих из реалий социально-экономического моделирования, претерпевает следующие модификации:

во-первых, помимо управляющего воздействия ЛПР (лица, принимающего решение) учитывается также и влияние неопределенных факторов, то есть постановка становится игровой: в данном случае рассматривается класс контруправлений (то есть ЛПР выбирает позиционную контрстратегию) "против" программной неопределенности;

во-вторых, качество управления оценивается не одним, а сразу несколькими критериями, таким образом, задача приобретает многокритериальный характер;

в-третьих, наряду с заданными критериями ЛПР учитывает еще и риски – формализация функции риска по Сэвиджу позволяет использовать это понятие в постановке задачи, не содержащей даже намека на стохастичность.

Таким образом, приходим к многокритериальной динамической задаче при неопределенности и необходимости ее решения при оптимальном сочетании исходов и рисков. В настоящей статье ограничимся линейно-квадратичным вариантом во многом в целях получения явного вида решения для достаточно широкого класса задач.

1. Математическая модель

Под *линейно-квадратичной многокритериальной позиционной динамической задачей при неопределенности (ДМЗН)* понимается упорядоченный набор

$$\langle \Sigma, \mathfrak{A}, \mathcal{Z},\ J(U, Z, t_0, x_0)\rangle. \tag{1}$$

Здесь изменение управляемой системы Σ описывается линейным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = Ax + u + A_1 z + a(t),\ x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

где t – время, меняющееся от $t_0 \geqslant 0$ до $\vartheta = const > t_0$, фазовый вектор $x \in \mathbf{R}^m$, вектор управляющих воздействий ЛПР $u \in \mathbf{R}^m$, вектор неопределенных факторов $z \in \mathbf{R}^k$, а пара $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbf{R}^m$ – заданная начальная позиция. В (2) $m \times m$-матрица A, $m \times k$-матрица A_1 постоянны и компоненты m-вектора $a(t)$ непрерывны по $t \in [0, \vartheta]$ (обозначаем этот факт $a(\cdot) \in C_m[0, \vartheta]$).

Следующим образом формализуется множество $\mathfrak{A}$ контрстратегий U, выбором которых "распоряжается" ЛПР:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} = \{U \div u(t,x,z) \mid u(t,x,z) = P(t)x + Q(t)z + p(t) \\ \forall P(\cdot) \in C_{m\times m}[0,\vartheta],\ \forall Q(\cdot) \in C_{m\times k}[0,\vartheta]\ \forall p(\cdot) \in C_m[0,\vartheta]\}.\end{aligned} \tag{3}$$

Множество $\mathcal{Z}$ программных неопределенностей Z определим следующим образом:

$$\mathcal{Z} = \{Z \div z[t] \mid \dot{z}[t] = Bz[t] + b(t),\ \forall z[t_0] = z_0 \in \mathbb{R}^k\}, \tag{4}$$

где $k \times k$-матрица B постоянна, $b(\cdot) \in C_k[0, \vartheta]$. Заметим, что источником принятого в (4) описания множества неопределенности $\mathcal{Z}$ послужила модель Эванса из [5]; множество неопределенностей $\mathcal{Z}$ получаем, когда начальное значение z_0 "пробегает" все евклидово пространство $\mathbb{R}^k$, а множество контрастратегий $\mathfrak{A}$, – когда матрицы $P(t), Q(t)$ и вектор $p(t)$ "пробегают" все множество непрерывных на $[0, \vartheta]$ матриц и векторов соответственно.

Наконец, $J_i(U, Z, t_0, x_0)$ – i-я компонента векторного критерия

$$J(U, Z, t_0, x_0) = (J_1(U, Z, t_0, x_0), ..., J_n(U, Z, t_0, x_0)),$$

заданного следующим линейно-квадратичным функционалом:

$$\begin{gathered}J_i(U, Z, t_0, x_0) = x'(\vartheta)C_i x(\vartheta) + 2c_i' x(\vartheta) + \\ + \int_{t_0}^{\vartheta} \{u'[t][D_i u[t] + 2K_i z[t] + 2M_i x(t)] + z'[t][L_i z[t] + \\ +2N_i x(t)] + x'(t)G_i x(t) + 2d_i' u[t] + 2l_i' z[t] + 2g_i' x(t)\} dt \quad (i \in \mathbf{N}),\end{gathered} \tag{5}$$

здесь использованы *постоянные* $m \times m$-матрицы C_i, D_i, M_i, G_i, $m \times k$-матрицы K_i, N_i', $k \times k$-матрицы L_i, m-вектора c_i, d_i, g_i, k-вектора l_i, причем D_i, L_i, G_i и C_i симметричны; штрих сверху означает операцию транспонирования; множество порядковых номеров критериев обозначим через $\mathbf{N} = \{1, ..., n\}$.

2. Определение функций риска

Для каждого критерия $J_i(U, Z, t_0, x_0)$ $(i \in \mathrm{N})$ из (5) рассмотрим вспомогательную однокритериальную линейно-квадратичную задачу

$$\langle \Sigma, \mathfrak{A}\ , \mathcal{Z},\ J_i(U, Z, t_0, x_0) \rangle. \tag{6}$$

В (6) управляемая динамическая система Σ описывается дифференциальным векторным линейным уравнением (2) с соответствующим начальным условием; $\mathfrak{A}$ – множество контрстратегий U из (3); $\mathcal{Z}$ – множество программных неопределенностей Z из (4); $J_i(U, Z, t_0, x_0)$ – линейно-квадратичный функционал, заданный в (5).

Построим функционал:

$$\max_{U \in \mathfrak{A}} J_i(U, Z, t_0, x_0) = J_i(U^{(i)}, Z, t_0, x_0) = J_i[Z, t_0, x_0]. \tag{7}$$

Затем для каждого критерия $J_i(U, Z, t_0, x_0)$ введем *функцию риска по этому критерию*

$$\Phi_i(U, Z, t_0, x_0) = J_i[Z, t_0, x_0] - J_i(U, Z, t_0, x_0). \tag{8}$$

"Содержательный смысл" функции риска: она численно оценивает риск (сожаление) ЛПР о том, что при неопределенности $Z \in \mathcal{Z}$ он выбирает контрстратегию $U \in \mathfrak{A}$, а не $U^{(i)}$, максимизирующую критерий $J_i(U, Z, t_0, x_0)$.

Заметим, что при определении контрстратегии используется z (де-факто – неопределенность Z), конкретно – неизвестное начальное значение z_0 вектор-функции $z(t)$. Тем не менее с учетом того, что ЛПР известна система из (4), задающая динамику неопределенности, это не нарушает формализацию риска по Сэвиджу [2], более того, в итоге будет построена функция $V_i(t_0, x_0, z_0) = J_i[Z, t_0, x_0]$, зависящая также от $z[t_0] = z_0$ и не зависящая от значения решения $z[t]$ системы из (4) в любой другой момент времени.

Далее используем *векторную функцию риска,* заданную n-векторным функционалом

$$\Phi(U, Z, t_0, x_0) = (\Phi_1(U, Z, t_0, x_0), ..., \Phi_n(U, Z, t_0, x_0)),$$

где компоненты $\Phi_i(U, Z, t_0, x_0)$, $i \in \mathrm{N}$, определены равенством (8).

3. Формализация гарантированного решения

Определение 1. Тройку $(U^*, J^p[t_0,x_0], \Phi^p[t_0,x_0]) \in \mathfrak{U} \times \mathbb{R}^{2n}$ назовем гарантрованным по исходам и рискам решением задачи (1), если при любом выборе начальной позиции $(t_0, x_0) \in [0,\vartheta) \times \mathbb{R}^m$ существует неопределенность $Z_p \in \mathcal{Z}$, для которой $J^p[t_0,x_0] = J(U^*, Z_p, t_0, x_0)$, $\Phi^p[t_0,x_0] = \Phi(U^*, Z_p, t_0, x_0)$ и

1^0) контрстратегия U^* является максимальной по Парето [3,4] в $2n-$критериальной динамической задаче

$$\langle \Sigma, \mathfrak{U}, \{J_i(U,Z,t_0,x_0), -\Phi_i(U,Z,t_0,x_0)\}_{i\in\mathrm{N}}\rangle, \tag{9}$$

т.е. для каждой тройки $(Z,t_0,x_0) \in \mathcal{Z} \times [0,\vartheta) \times \mathbb{R}^m$ несовместна система $2n$ неравенств

$$\begin{cases} J_i(U,Z,t_0,x_0) \geqslant J_i(U^*,Z,t_0,x_0), \\ \Phi_i(U,Z,t_0,x_0) \leqslant \Phi_i(U^*,Z,t_0,x_0) \quad \forall U \in \mathfrak{U}\ (i \in \mathrm{N}), \end{cases} \tag{10}$$

из которых хотя бы одно строгое;

2^0) неопределенность Z_p минимальна по Парето [3] в $2n-$критериальной задаче

$$\langle \Sigma(U = U^*), \mathcal{Z}, \{J_i(U^*,Z,t_0,x_0), -\Phi_i(U^*,Z,t_0,x_0)\}_{i\in\mathrm{N}}\rangle, \tag{11}$$

т.е. при каждых $(t_0,x_0) \in [0,\vartheta) \times \mathbb{R}^m$ несовместна система $2n$ неравенств

$$\begin{cases} J_i(U^*,Z,t_0,x_0) \leqslant J_i(U^*,Z_p,t_0,x_0), \\ \Phi_i(U^*,Z,t_0,x_0) \geqslant \Phi_i(U^*,Z_p,t_0,x_0) \quad \forall Z \in \mathcal{Z}\ (i \in \mathrm{N}), \end{cases} \tag{12}$$

из которых, по крайней мере, одно строгое.

При этом $J^p[t_0,x_0]$ назовем гарантированным векторным исходом, а $\Phi^p[t_0,x_0]$ – гарантированным векторным риском в задаче (1) с начальной позицией (t_0,x_0).

4. Схема аналитического конструирования гарантированного решения

Утверждение 1. Система неравенств (для каждой тройки $(Z,t_0,x_0) \in \mathcal{Z} \times [0,\vartheta) \times \mathbb{R}^m$)

$$J_i(U,Z,t_0,x_0) \geqslant J_i(U^*,Z,t_0,x_0) \quad \forall U \in \mathfrak{U} \quad (i \in \mathrm{N}), \tag{13}$$

несовместна (при хотя бы одном строгом) тогда и только тогда, когда несовместна система (10) (также при хотя бы одном строгом).

Это утверждение сразу следует из (8) с учетом того, что $J_i[Z, t_0, x_0]$ $(i \in \mathrm{N})$ от U не зависит.

Утверждение 2 [1, с. 281]. Если для некоторого постоянного $n-$вектора α с положительными компонентами α_i $(i \in \mathrm{N})$ контрстратегия $U^* \in \mathfrak{A}$ найдена из (выполняющегося для всех $(Z, t_0, x_0) \in \mathcal{Z} \times [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$) равенства

$$\max_{U \in \mathfrak{A}} \alpha' J(U, Z, t_0, x_0) = \alpha' J(U^*, Z, t_0, x_0), \tag{14}$$

при ограничениях (2) - (4), то U^* является максимальной по Парето в задаче (9) и поэтому удовлетворяет требованию (1^0) определения 1.

Утверждение 3. Если для некоторого постоянного $n-$ вектора β с компонентами $\beta_i \in (0,1)$ $(i = 1, ..., n)$ неопределенность Z_p удовлетворяет условию

$$\min_{Z \in \mathcal{Z}} \sum_{i=1}^{n} [J_i(U^*, Z, t_0, x_0) - \beta_i \max_{U \in \mathfrak{A}} J_i(U, Z, t_0, x_0)] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [J_i(U^*, Z_p, t_0, x_0) - \beta_i \max_{U \in \mathfrak{A}} J_i(U, Z_p, t_0, x_0)] \tag{15}$$

при ограничениях (2) (где $U = U^*$), (3), (4) и выполняющегося для всех $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$, то Z_p является минимальной по Парето в задаче (11) и поэтому отвечает требованию (2^0) определения 1.

Справедливость утверждения 3 устанавливается аналогично утверждению 2.

Приведенные утверждения позволяют предложить следующий конструктивный способ построения гарантированного решения для динамической $n-$критериальной задачи при неопределенности (1).

Шаг 1. Применяя метод динамического программирования, решить задачу (7): построить определенные на $[0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ функции $V_i(t_0, x_0, z_0)$ такие, что

$$\begin{gathered} \max\nolimits_{U \in \mathfrak{A}} J_i(U, Z, t_0, x_0) = V_i(t_0, x_0, z_0) \\ \forall (t_0, x_0, z_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \quad (i \in \mathrm{N}). \end{gathered} \tag{16}$$

Шаг 2. На основании (14) построить явный вид контрстратегии $U^* \in \mathfrak{A}$, именно, найти $U^* \in \mathfrak{A}$, исходя из условия:

$$\max_{U\in\mathfrak{A}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i J_i(U, Z, t_0, x_0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i J_i(U^*, Z, t_0, x_0)$$
$$\forall (Z, t_0, x_0) \in \mathcal{Z} \times [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m \tag{17}$$

при ограничениях (2) - (4) (см. утверждения 1 и 2); здесь снова применяем метод динамического программирования.

Шаг 3. Найти n функций

$$\overline{V}_i(t_0, x_0, z_0) = J_i(U^*, Z, t_0, x_0) \quad \forall (t_0, x_0, z_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^{m+k} \ (i \in \mathrm{N}) \tag{18}$$

при ограничениях (2), (3) (где $U = U^* \div u(t, x, z))$) и (4); здесь так же как и на шаге 2 применяем подходящий вариант метода динамического программирования.

Шаг 4. Построить

$$J_i(U^*, Z, t_0, x_0) = \overline{V}_i(t_0, x_0, z_0),$$

$$\Phi_i(U^*, Z, t_0, x_0) = V_i(t_0, x_0, z_0) - \overline{V}_i(t_0, x_0, z_0) \tag{19}$$

$$\forall (t_0, x_0, z_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \quad (i \in \mathrm{N})$$

и, исходя из (15), решить линейно-квадратичную задачу математического программирования:

$$\min_{z_0 \in \mathbb{R}^k} \sum_{i=1}^{n} [\overline{V}_i(t_0, x_0, z_0) - \beta_i V_i(t_0, x_0, z_0)] =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} [\overline{V}_i(t_0, x_0, z_p) - \beta_i V_i(t_0, x_0, z_p)] \quad \forall (t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m, \tag{20}$$

при хотя бы одном наборе постоянных $\beta_i \in (0, 1)$, $i \in \mathrm{N}$; найденное z_p порождает (в силу (4)) неопределенность $Z_p \div z_p[t]$, где $z_p[t]$ есть решение системы

$$\dot{z} = Bz + b(t), \ z(t_0) = z_p.$$

Шаг 5. Используя (19), найти

$$J_i^p[t_0, x_0] = J_i(U^*, Z_p, t_0, x_0) = \overline{V}_i(t_0, x_0, z_p) \quad (i \in \mathrm{N}),$$

$$\Phi_i^p[t_0, x_0] = \Phi_i(U^*, Z_p, t_0, x_0) = V_i(t_0, x_0, z_p) - \overline{V}_i(t_0, x_0, z_p) \quad (i \in \mathrm{N});$$

тогда гарантированное по исходам и рискам решение задачи (1) примет вид

$$(U^*, J^p[t_0, x_0], \Phi^p[t_0, x_0])$$

при любых $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$, где

$$J^p[t_0, x_0] = (\overline{V}_1(t_0, x_0, z_p), ..., \overline{V}_n(t_0, x_0, z_p)),$$

$$\Phi^p[t_0, x_0] = (V_1(t_0, x_0, z_p) - \overline{V}_1(t_0, x_0, z_p), ..., V_n(t_0, x_0, z_p) - \overline{V}_n(t_0, x_0, z_p)).$$

5. Явный вид гарантированного решения

На шагах 1,2,3 используются подходящие варианты метода динамического программирования. Все рассуждения проходят по типовой схеме, поэтому приведем ее только для шага 1, а для прочих укажем лишь конечный результат.

Шаг 1.

Прежде чем найти функцию риска по i-му критерию из (8) следует построить функцию $V_i(t, x, z)$, исходя из равенства:

$$V_i(t_0, x_0, z_0) = \max_{U \in \mathfrak{A}} J_i(U, Z, t_0, x_0) = J_i(U^{(i)}, Z, t_0, x_0) = J_i[Z, t_0, x_0] \quad (i \in \mathrm{N}) \tag{21}$$

для любых $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$, $Z \in \mathcal{Z}$ и при ограничениях (2) - (4), именно, при

$$\dot{x} = Ax + u + A_1 z + a(t), \; x(t_0) = x_0;$$

$$\dot{z} = Bz + b(t), z[t_0] = z_0.$$

Чтобы применить здесь метод динамического программирования вводится скалярная функция

$$W_i(t, x, u, z, V_i) = \frac{\partial V_i}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_i}{\partial x}\right]' [Ax + u + A_1 z + a(t)] +$$

$$+ \left[\frac{\partial V_i}{\partial z}\right]' [Bz + b(t)] + u'[D_i u + 2K_i z + 2M_i x] + \tag{22}$$

$$+ z'[L_i z + 2N_i x] + x' G_i x + 2d_i' u + 2l_i' z + 2g_i' x,$$

где, например, $\dfrac{\partial V_i}{\partial x}$ означает m-вектор-столбец, компоненты которого есть частные производные функции $V_i(t, x, z)$ по координатам m-вектора

x; тогда $\left[\dfrac{\partial V_i}{\partial z}\right]'$ в (22) есть вектор-строка $\left(\dfrac{\partial V_i}{\partial z_1}, ..., \dfrac{\partial V_i}{\partial z_k}\right)$; далее для сокращения записей используем также обозначения

$$F_i(t, x, u, z) = u'[D_i u + 2K_i z + 2M_i x] +$$

$$+ z'[L_i z + 2N_i x] + x'G_i x + 2d_i' u + 2l_i' z + 2g_i' x,$$

$$\chi_i(x) = x'C_i x + 2c_i' x \quad (i \in \mathrm{N}).$$

Теорема 1 [1, с. 267]. Пусть удалось найти m-вектор-функцию $u^*(t, x, z, V_i)$ и единственную непрерывно-дифференцируемую скалярную функцию $V_i(t, x, z)$ такие, что

1^0) при всех $x \in \mathbb{R}^m$, $z \in \mathbb{R}^k$ справедливо тождество

$$V_i(\vartheta, x, z) = x'C_i x + 2c_i' x \equiv \chi_i(x);$$

2^0) имеет место

$$W_i(t, x, u^*(t, x, z, V_i), z, V_i) = \max_u W_i(t, x, u, z, V_i)$$

для любых $t \in [0, \vartheta]$, $x \in \mathbb{R}^m$, $V_i \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^k$;

3^0) для каждых $(t, x, z) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ выполняется тождество

$$W_i(t, x, u(t, x, z, V_i(t, x, z)), z, V_i(t, x, z)) \equiv 0;$$

4^0) вектор-функция $u^*(t, x, z, V_i(t, x, z)) = u^{(i)}(t, x, z)$ такова, что для $U^{(i)} \div u^{(i)}(t, x, z)$ имеет место включение $U^{(i)} \in \mathfrak{A}$, т.е.

$$U^{(i)} \div u^{(i)}(t, x, z) = P_1^{(i)}(t)x + p^{(i)}(t) + P_2^{(i)}(t)z,$$

где $P_1^{(i)}(\cdot) \in C_{m\times m}[0, \vartheta]$, $p^{(i)}(\cdot) \in C_m[0, \vartheta]$, $P_2^{(i)}(\cdot) \in C_{m\times k}[0, \vartheta]$.

Тогда при любом выборе начальной позиции $(t_0, x_0, z_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^{m+k}$ контрстратегия $U^{(i)}$ и функция $V_i(t, x, z)$ удовлетворяют равенству (21).

Далее $D < 0$ ($\leqslant 0$) означает, что квадратичная форма $x'Dx$ определенно отрицательна (неположительна).

Утверждение 4 [1, с.272]. Если в функционалах (5)

$$D_i < 0,\ C_i \leqslant 0,\ G_i - M_i' D_i^{-1} M_i \leqslant 0\ (i \in N),$$

то контрстратегии $U^{(i)} \in \mathfrak{A}$ и функции $V_i(t, x, z)$, реализуют при любых $(i \in N\ Z \in \mathcal{Z}$ и $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m)$ равенство (21).

Теорема 1 приводит к следующему *способу* решения поставленной задачи (предполагаем выполненными требования утверждения 4):

а) из условия (2^0) теоремы 1 найдем $u^*(t, x, z, V_i)$, максимизирующее $W_i(t, x, u, z, V_i)$ при любых $(t, x, z, V_i) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$, именно,

$$u^*(t, x, z, V_i) = -\tfrac{1}{2} D_i^{-1} \left[\tfrac{\partial V_i}{\partial x} + 2K_i z + 2M_i x + 2d_i\right]; \tag{23}$$

б) построим решение $V_i(t, x, z)$ уравнения с частными производными

$$W_i(t, x, u^*(t, x, z, V_i), z, V_i) = \frac{\partial V_i}{\partial t} +$$

$$+ \left[\frac{\partial V_i}{\partial x}\right]' [A(t)x + u^*(t, x, z, V_i) + A_1 z + a(t)] +$$

$$+ \left[\frac{\partial V_i}{\partial z}\right]' [Bz + b(t)] + F_i(t, x, u^*(t, x, z, V_i), z) = 0$$

с граничным условием

$$V_i(\vartheta, x, z) = \chi_i(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall z \in \mathbb{R}^k.$$

Будем искать функцию $V_i(t, x, z)$ в виде линейно-квадратичной формы

$$V_i(t, x, z) = x'\Theta_i(t)x + 2z'\Xi_i(t)x + z'\chi_i(t)z + 2\xi_i'(t)x + 2\eta_i'(t)z + \omega_i(t), \tag{24}$$

где соответствующих размерностей матрицы $\Theta_i(t), \Xi_i(t), \chi_i(t)$, вектора $\xi_i(t), \eta_i(t)$ и скалярная функция $\omega_i(t)$ подлежат определению; предполагаем, что $\Theta_i(t)$ и $\chi_i(t)$ симметричны.

Подставляя $V_i(t,x,z)$ из (24) в (23) для $u^*(t,x,z,V_i)$ и $W_i(t,x,u,z,V_i)$, получаем, согласно условию (3^0) теоремы 1:

$$W_i(t,x,u^*(t,x,z,V_i(t,x,z)),z,V_i(t,x,z)) =$$

$$= \frac{\partial V_i}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_i}{\partial x}\right]' [Ax + A_1 z + a(t)] -$$

$$-\frac{1}{4}\left[\frac{\partial V_i}{\partial x} + 2K_i z + 2M_i x + 2d_i\right]' D_i^{-1}\left[\frac{\partial V_i}{\partial x} + 2K_i z + 2M_i x + 2d_i\right] +$$

$$+\left[\frac{\partial V_i}{\partial z}\right]' [Bz + b(t)] + z'[L_i z + 2N_i x] + x' G_i x + 2l_i' z + 2g_i' x =$$

$$= x'\dot{\Theta}_i x + 2z'\dot{\Xi}_i x + z'\dot{\chi}_i z + 2\dot{\xi}_i' x + 2\dot{\eta}_i' z + \dot{\omega}_i(t) +$$

$$+2[x'\Theta_i + z'\Xi_i + \xi_i'][Ax + A_1 z + a(t)] - [x'(\Theta_i + M_i') +$$

$$+z'(\Xi_i + K_i') + \xi_i' + d_i']D_i^{-1}[(\Theta_i + M_i)x + (\Xi_i' + K_i)z + \xi_i + d_i] +$$

$$+2[x'\Xi_i' + z'\chi_i + \eta_i'][Bz + b(t)] +$$

$$+z'L_i z + 2z'N_i x + x'G_i x + 2l_i' z + 2g_i' x = 0.$$

Приравнивая здесь и в условии (1^0) теоремы 1 коэффициенты при однотипных слагаемых, получаем, что тождества из (3^0) теоремы 1 выполнены при всех $(t,x,z) \in [0,\vartheta) \times \mathbb{R}^{m+k}$, если матрицы $\Theta_i(t), \Xi_i(t), \chi_i(t)$, вектора $\xi_i(t), \eta_i(t)$ и скалярная функция $\omega_i(t)$ являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$
\begin{cases}
\dot{\Theta}_i + \Theta_i[A - D_i^{-1}M_i] + [A' - M_i'D_i^{-1}]\Theta_i - \\
-\Theta_i D_i^{-1}\Theta_i + G_i - M_i'D_i^{-1}M_i = 0_{m\times m}, \quad \Theta_i(\vartheta) = C_i; \\
\dot{\Xi}_i + \Xi_i A + A_1'\Theta_i - (\Xi_i + K_i')D_i^{-1}(\Theta_i + M_i) + \\
+B'\Xi_i + N_i = 0_{k\times n}, \quad \Xi_i(\vartheta) = 0_{k\times m}; \\
\dot{\chi}_i + \Xi_i A_1 + A_1'\Xi_i' - (\Xi_i + K_i')D_i^{-1}(\Xi_i' + K_i) + \\
+\chi_i B + B'\chi_i + L_i = 0_{k\times k}, \quad \chi_i(\vartheta) = 0_{k\times k}; \\
\dot{\xi}_i - (\Theta_i + M_i')D_i^{-1}(\xi_i + d_i) + A'\xi_i + \Theta_i a(t) + \\
+\Xi_i' b(t) + g_i = 0_m, \quad \xi_i(\vartheta) = c_i; \\
\dot{\eta}_i - (\Xi_i + K_i')D_i^{-1}(\xi_i + d_i) + B'\eta_i + A_1'\xi_i + \Xi_i a(t) + \\
+\chi_i b(t) + l_i = 0_k, \quad \eta_i(\vartheta) = 0_k; \\
\dot{\omega}_i + 2\xi_i' a(t) + 2\eta_i' b(t) - (d_i' + \xi_i')D_i^{-1}(d_i + \xi_i) = 0, \\
\omega_i(\vartheta) = 0.
\end{cases}
\tag{25}
$$

При выполнении требований утверждения 4 из [6, с.208] следует, что первое из (25) матричное дифференциальное уравнение типа Риккати имеет единственное, непрерывное, продолжимое на $[0, \vartheta]$ решение $\Theta_i(t)$. Подставляя $\Theta_i = \Theta_i(t)$ в следующее уравнение, из (25) получаем матричное дифференциальное линейное неоднородное векторное уравнение относительно Ξ_i с непрерывными (по t) коэффициентами. Такая система также имеет [7, с.29] единственное, непрерывное решение $\Xi_i(t)$, продолжимое на $[0, \vartheta]$. Действуя аналогично, найдем решение $\chi_i(t), \xi_i(t), \eta_i(t), \omega_i(t)$ системы (25).

Используя это решение получаем, что контрстратегия

$$U^{(i)} \div u^{(i)}(t,x,z) = u^*(t,x,z,V_i(t,x,z)) =$$

$$= -D_i^{-1}[(\Theta_i(t) + M_i)x + (\Xi_i'(t) + K_i)z + \xi_i(t) + d_i]$$

и функция

$$V_i(t,x,z) = x'\Theta_i(t)x + 2z'\Xi_i(t)x + z'\chi_i(t)z + 2\xi_i'(t)x + 2\eta_i'(t)z + \omega_i(t),$$

(где $\Theta_i(t), \Xi_i(t), \chi_i(t), \xi_i(t), \eta_i(t), \omega_i(t)$ являются решением соответствующих подсистем из (25)), реализует равенство (21) при любых $Z \in \mathcal{Z}$ и $(t_0, x_0) \in \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$ $(i \in \mathbf{N})$.

Шаг 2.

Для набора положительных чисел α_i $(i \in \mathbf{N})$ введем следующие матрицы и вектора:

$$D_\alpha = \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i D_i,\ d_\alpha = \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i d_i,\ L_\alpha = \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i L_i,\ l_\alpha = \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i l_i,$$

$$G_\alpha = \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i G_i,\ g_\alpha = \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i g_i,\ M_\alpha = \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i M_i,\ N_\alpha = \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i N_i, \quad (26)$$

$$K_\alpha = \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i K_i,\ C_\alpha = \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i C_i,\ c_\alpha = \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i c_i.$$

Решим систему обыкновенных дифференциальных уравнений аналогичную (25) (при выполнении требований утверждения 4),

$$
\begin{cases}
\dot{\Theta}_\alpha + \Theta_\alpha[A - D_\alpha^{-1}M_\alpha] + [A' - M'_\alpha D_\alpha^{-1}]\Theta_\alpha - \\
-\Theta_\alpha D_\alpha^{-1}\Theta_\alpha + G_\alpha - M'_\alpha D_\alpha^{-1}M_\alpha = 0_{m\times m}, \quad \Theta_\alpha(\vartheta) = C_\alpha; \\
\dot{\Xi}_\alpha + \Xi_\alpha A + A'_1\Theta_\alpha - (\Xi_\alpha + K'_\alpha)D_\alpha^{-1}(\Theta_\alpha + M_\alpha) + \\
+B'\Xi_\alpha + N_\alpha = 0_{k\times m}, \quad \Xi_\alpha(\vartheta) = 0_{k\times n}; \\
\dot{\chi}_\alpha + \Xi_\alpha A_1 + A'_1\Xi'_\alpha - (\Xi_\alpha + K'_\alpha)D_\alpha^{-1}(\Xi'_\alpha + K_\alpha) + \\
+\chi_\alpha B + B'\chi_\alpha + L_\alpha = 0_{k\times k}, \quad \chi_\alpha(\vartheta) = 0_{k\times k}; \\
\dot{\xi}_\alpha - (\Theta_\alpha + M'_\alpha)D_\alpha^{-1}(\xi_\alpha + d_\alpha) + A'\xi_\alpha + \Theta_\alpha a(t) + \\
+\Xi'_\alpha b(t) + g_\alpha = 0_m, \quad \xi_\alpha(\vartheta) = c_\alpha; \\
\dot{\eta}_\alpha - (\Xi_\alpha + K'_\alpha)D_\alpha^{-1}(\xi_\alpha + d_\alpha) + B'\eta_\alpha + A'_1\xi_\alpha + \Xi_\alpha a(t) + \\
+\chi_\alpha b(t) + l_\alpha = 0_k, \quad \eta_\alpha(\vartheta) = 0_k; \\
\dot{\omega}_\alpha + 2\xi'_\alpha a(t) + 2\eta'_\alpha b(t) - (d'_\alpha + \xi'_\alpha)D_\alpha^{-1}(d_\alpha + \xi_\alpha) = 0, \ \omega_\alpha(\vartheta) = 0.
\end{cases} \tag{27}
$$

Тогда максимальная по Парето в задаче (9) контрстратегия U^* запишется следующим образом:

$$
U^* \div u(t, x, z, V_\alpha(t, x, z)) = u^*(t, x, z) =
$$
$$
= -D_\alpha^{-1}\left[(\Xi'_\alpha(t) + K_\alpha)z + (\Theta_\alpha(t) + M_\alpha)x + (\xi_\alpha(t) + d_\alpha)\right]. \tag{28}
$$

Шаг 3.

Зная Парето-максимально управление U^*, построенное шагом ранее, можно подставить его во всю ту же процедуру динамического программирования и найти функцию Беллмана по каждому критерию. Пусть в задаче (1) фиксирован индекс $i \in \mathrm{N}$ и контрстратегия U^*, имеющая вид (28), которую запишем в виде

$$U^* \div u^*(t,x,z) = \overline{P}(t)x + \overline{p}(t) + \overline{Q}(t)z, \qquad (29)$$

где (см. (26))

$$\begin{aligned}
\overline{P}(t) &= -D_\alpha^{-1}\left[\Theta_\alpha(t) + M_\alpha\right],\\
\overline{p}(t) &= -D_\alpha^{-1}\left[\xi_\alpha(t) + d_\alpha\right],\\
\overline{Q}(t) &= -D_\alpha^{-1}\left[\Xi'_\alpha(t) + K_\alpha\right],
\end{aligned} \qquad (30)$$

а $\Theta_\alpha(t), \Xi_\alpha(t)$ и $\xi_\alpha(t)$ суть решение системы (27). Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&\overline{A}(t) = A + \overline{P}(t),\ \overline{a} = a(t) + \overline{p}(t),\ \overline{A}_1(t) = A_1 + \overline{Q}(t),\\
&\overline{G}_i(t) = G_i + (\overline{P}(t))'D_i\overline{P}(t) + (\overline{P}(t))'M_i + M_i'\overline{P}(t),\\
&\overline{g}_i(t) = g_i + (\overline{P}(t))'D_i\overline{p}(t) + M_i'\overline{p}(t) + (\overline{P}(t))'d_i,\\
&\overline{L}_i(t) = L_i + (\overline{Q}(t))'D_i\overline{Q}(t) + (\overline{Q}(t))'K_i + K_i'\overline{Q}(t),\\
&\overline{l}_i(t) = l_i + (\overline{Q}(t))'D_i\overline{p}(t) + K_i'\overline{p}(t) + \overline{Q}'(t)d_i,\\
&\overline{N}_i(t) = N_i + (\overline{Q}(t))'D_i\overline{P}(t) + K_i'\overline{P}(t) + \overline{Q}'(t)M_i,\\
&\overline{r}_i(t) = (\overline{p}(t))'D_i\overline{p}(t) + 2d_i'\overline{p}(t).
\end{aligned} \qquad (31)$$

Система, аналогичная (25) имеет вид:

$$
\begin{cases}
\dot{\overline{\Theta}}_i + \overline{\Theta}_i\overline{A}(t) + (\overline{A}(t))'\overline{\Theta}_i + \overline{G}_i(t) = 0_{m\times m},\ \overline{\Theta}_i(\vartheta) = C_i;\\[2mm]
\dot{\overline{\Xi}}_i + \overline{\Xi}_i\overline{A}(t) + (\overline{A}_1(t))'\overline{\Theta}_i + B'\overline{\Xi}_i + \overline{N}_i(t) = 0_{k\times m},\ \overline{\Xi}_i(\vartheta) = 0_{k\times m};\\[2mm]
\dot{\overline{\chi}}_i + \overline{\chi}_i B + B'\overline{\chi}_i + (\overline{A}_1(t))'(\overline{\Xi}_i)' + \overline{\Xi}_i\overline{A}_1(t) + \overline{L}_i(t) = 0_{m\times m},\\
\overline{\chi}_i(\vartheta) = 0_{k\times k};\\[2mm]
\dot{\overline{\xi}}_i + (\overline{A}(t))'\overline{\xi}_i + \overline{\Theta}_i\overline{a}(t) + (\overline{\Xi}_i)'b(t) + \overline{g}_i(t) = 0_m,\ \overline{\xi}_i(\vartheta) = c_i;\\[2mm]
\dot{\overline{\eta}}_i + (\overline{A}_1(t))'\overline{\xi}_i + \overline{\Xi}_i\overline{a}_i(t) + B\overline{\eta}_i(t) + (\overline{\chi}_i)'b(t) + \overline{l}_i(t) = 0_k,\ \overline{\eta}_i(\vartheta) = 0_k;\\
\dot{\overline{\omega}}_i + 2(\overline{\xi}_i)'\overline{a}(t) + 2(\overline{\eta}_i)'b(t) + \overline{r}_i(t) = 0,\ \overline{\omega}_i(\vartheta) = 0 \quad (i\in\mathrm{N}).
\end{cases}
\tag{32}
$$

Тогда искомая функция принимает вид:

$$
\overline{V}_i(t_0,x_0,z_0) = J_i(U^*,Z,t_0,x_0) =
$$

$$
= x_0'\overline{\Theta}_i(t_0)x_0 + 2z_0'\overline{\Xi}_i(t_0)x_0 + z_0'\overline{\chi}_i(t_0)z_0 + 2(\overline{\xi}_i(t_0))'x_0 + 2(\overline{\eta}_i(t_0))'z_0 + \overline{\omega}_i(t_0).
\tag{33}
$$

Шаги 4,5 (векторные гарантии).

Прежде всего здесь найдем минимальную по Парето неопределенность Z_p в задаче (11). Согласно (33) и (11) будет

$$
J_i(U^*,Z,t_0,x_0) = \overline{\varphi}_i(t_0,x_0) + z_0'\overline{\chi}_i(t_0)z_0 + 2z_0'\overline{\Xi}_i(t_0)x_0 + 2(\overline{\eta}_i(t_0))'z_0,
$$

$$
\max_U J_i(U^*,Z,t_0,x_0) = \varphi_i(t_0,x_0) + z_0'\chi_i(t_0)z_0 + 2z_0'\Xi_i(t_0)x_0 + 2(\eta_i(t_0))'z_0,
\tag{34}
$$

где

$$
\overline{\varphi}_i(t_0,x_0) = x_0'\overline{\Theta}_i(t_0)x_0 + 2(\overline{\xi}_i(t_0))'x_0 + \overline{\omega}_i(t_0),
$$

$$
\varphi_i(t_0,x_0) = x_0'\Theta_i(t_0)x_0 + 2(\xi_i(t_0))'x_0 + \omega_i(t_0),
$$

а набор $\overline{\Theta}_i(t)$, $\overline{\Xi}_i(t)$, $\overline{\chi}_i(t)$, $\overline{\xi}_i(t)$, $\overline{\eta}_i(t)$, $\overline{\omega}_i(t)$ (соответственно, $\Theta_i(t)$, $\Xi_i(t)$, $\chi_i(t)$, $\xi_i(t)$, $\eta_i(t)$, $\omega_i(t)$) есть решение системы (32) (соответственно, (25)).

Тогда с учетом (34) утверждение 3 приводится к

$$\min_{z_0 \in \mathbb{R}^k} \left[z_0' \chi(t_0) z_0 + 2 z_0' \Xi(t_0) x_0 + 2(\eta(t_0))' z_0 + \varphi(t_0, x_0) \right] =$$

$$= \left[z_p' \chi(t_0) z_p + 2 z_p' \Xi(t_0) x_0 + 2(\eta(t_0))' z_p + \varphi(t_0, x_0) \right], \quad (35)$$

здесь

$$\chi(t) = \sum_{i \in \mathbf{N}} \left[\overline{\chi}_i(t) - \beta_i \chi_i(t) \right],$$

$$\Xi(t) = \sum_{i \in \mathbf{N}} \left[\overline{\Xi}_i(t) - \beta_i \Xi_i(t) \right],$$

$$\eta(t) = \sum_{i \in \mathbf{N}} \left[\overline{\eta}_i(t) - \beta_i \eta_i(t) \right],$$

$$\varphi(t) = \sum_{i \in \mathbf{N}} \left[\overline{\varphi}_i(t) - \beta_i \varphi_i(t) \right]$$

при постоянных $\beta_i \in (0, 1)$ $(i \in \mathbf{N})$.

Затем уже по z_0, найденному из (35), однозначно (с помощью (4)) строится минимальная по Парето (в задаче (11)) неопределенность $Z_p \div z_p[t]$, где $z_p[t]$ – решение системы $\dot{z} = Bz + b(t)$, $z(t_0) = z_p$.

Итак, согласно (35) задача сводится к нахождению

$$\min_{z_0 \in \mathbb{R}^k} \Psi(z) = \Psi(z_p),$$

здесь

$$\Psi(z) = z' \chi(t_0) z + 2m'(t_0, x_0) z,$$
$$m(t_0, x_0) = \Xi(t_0) x_0 + \eta(t_0).$$

Утверждение 5. Пусть удалось найти $\beta_i = const \in (0, 1)$ $(i \in \mathbf{N})$ такие, что $\chi(t_0) > 0$. Тогда

$$z_p = -\chi^{-1}(t_0) m(t_0, x_0). \quad (36)$$

Перейдем к построению векторной гарантии $J^p[t_0, x_0] = J(U^*, Z_p, t_0, x_0)$, $\Phi^p[t_0, x_0] = \Phi(U^*, Z_p, t_0, x_0)$, компоненты которых, с учетом (36), (33) и (24) примут вид

$$J_i(U^*, Z_p, t_0, x_0) = x_0'\overline{\Theta}_i(t_0)x_0 - 2m'(t_0, x_0)\chi^{-1}(t_0)\overline{\Xi}_i(t_0)x_0 +$$

$$+ m(t_0, x_0)'\chi^{-1}(t_0)\overline{\chi}_i(t_0)\chi^{-1}(t_0)m(t_0, x_0) + 2(\overline{\xi}_i(t_0))'x_0 -$$

$$- 2(\overline{\eta}_i(t_0))'\chi^{-1}(t_0)m(t_0, x_0) + \overline{\omega}_i(t_0),$$

$$\Phi_i(U^*, Z_p, t_0, x_0) = \max_U J_i(U, Z_p, t_0, x_0) - J_i(U^*, Z_p, t_0, x_0) =$$

$$= V_i(t_0, x_0, z_p) - \overline{V}_i(t_0, x_0, z_p) =$$

$$= x_0'[\Theta_i(t_0) - \overline{\Theta}_i(t_0)]x_0 - 2m'(t_0, x_0)\chi^{-1}(t_0)[\Xi_i(t) - \overline{\Xi}_i(t_0)]x_0 +$$

$$+ m(t_0, x_0)'\chi^{-1}(t_0)[\chi_i(t_0) - \overline{\chi}_i(t_0)]\chi^{-1}(t_0)m(t_0, x_0) + 2[\xi_i(t_0) - \overline{\xi}_i(t_0)]'x_0 -$$

$$- 2[\eta_i(t_0) - \overline{\eta}_i(t_0)]'\chi^{-1}(t_0)m(t_0, x_0) + \omega_i(t_0) - \overline{\omega}_i(t_0)$$

при любых $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$; здесь

$$\overline{\Theta}_i(t), \overline{\Xi}_i(t), \overline{\chi}_i(t), \overline{\xi}_i(t), \overline{\eta}_i(t), \overline{\omega}_i(t)$$

решение системы (32), а

$$\Theta_i(t), \Xi_i(t), \chi_i(t), \xi_i(t), \eta_i(t), \omega_i(t)$$

решение системы (25), $i \in \mathbf{N}$.

Основные результаты

Сформулируем итоговое утверждение.

Утверждение 6. Пусть для динамической n-критериальной задачи (1) - (5)

1^0) $D_i < 0,\ C_i \leqslant 0, G_i - M_i' D_i^{-1} M_i \leqslant 0 \quad (i \in \mathbf{N})$,

2^0) существуют постоянные $\alpha_i > 0$ $(i \in \mathbf{N})$, что $G_\alpha - M_\alpha' D_\alpha^{-1} M_\alpha \leqslant 0$,

3^0) существуют постоянные $\beta_i \in (0,1)$, $i \in \mathbf{N}$, такие, что $\chi(t) > 0,\ t \in [0, \vartheta]$.

Тогда при любом выборе начальной позиции позиции $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$ в задаче (1) - (5) существует гарантированное по исходам и рискам решение $(U^*,\ J(U^*, Z_p, t_0, x_0),\ \Phi(U^*, Z_p, t_0, x_0))$.

Кроме существования указанные утверждения позволяют предложить следующий конструктивный *способ* построения такого гарантированного решения:

а) проверить выполнение требования (1^0) и (2^0) утверждения 6;

б) найти решение $(\Theta_i(t), \Xi_i(t), \chi_i(t), \xi_i(t), \eta_i(t), \omega_i(t) | 0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$, $i \in \mathbf{N}$, системы (25));

в) используя (б), определить

$$\max_U J_i(U, Z, t_0, x_0) =$$
$$= x_0' \Theta_i(t_0) x_0 + 2(\xi_i(t_0))' x_0 + \omega_i(t_0) + z_0' \chi_i(t_0) z_0 + 2 z_0' \Xi_i(t_0) x_0 + 2(\eta_i(t_0))' z_0 \quad (i \in \mathbf{N});$$

г) построить по формулам (26) матрицы $C_\alpha, D_\alpha, K_\alpha, M_\alpha, L_\alpha, N_\alpha, G_\alpha$, векторы c_α, d_α, l_α, g_α, проверить выполнение требования (2^0) утверждения 6;

д) найти решение $(\Theta_\alpha(t), \Xi_\alpha(t), \xi_\alpha(t) | 0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ системы (27);

е) используя (д), построить контрстратегию

$$U^* \div -D_\alpha^{-1} \left[(\Xi_\alpha'(t) + K_\alpha) z + (\Theta_\alpha(t) + M_\alpha) x + (\xi_\alpha(t) + d_\alpha) \right];$$

ж) найти решение $(\overline{\Theta}_i(t), \overline{\Xi}_i(t), \overline{\chi}_i(t), \overline{\xi}_i(t), \overline{\eta}_i(t), \overline{\omega}_i(t) | 0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$, $i \in N$, системы, (32);

з) с помощью (ж) определить

$$J_i(U^*, Z, t_0, x_0) =$$
$$= x_0' \overline{\Theta}_i(t_0) x_0 + 2(\overline{\xi}_i(t_0))' x_0 + \overline{\omega}_i(t_0) + z_0' \overline{\chi}_i(t_0) z_0 + 2 z_0' \overline{\Xi}_i(t_0) x_0 + 2(\overline{\eta}_i(t_0))' z_0 \quad (i \in \mathbf{N});$$

и) с помощью (б) и (ж) построить

$$\chi(t) = \sum_{i\in\mathbf{N}} \left[\overline{\chi}_i(t) - \beta_i\chi_i(t)\right], \Xi(t) = \sum_{i\in\mathbf{N}} \left[\overline{\Xi}_i(t) - \beta_i\Xi_i(t)\right],$$
$$\eta(t) = \sum_{i\in\mathbf{N}} \left[\overline{\eta}_i(t) - \beta_i\eta_i(t)\right], m(t,x) = \Xi(t)x + \eta(t);$$

к) выбрать числа $\beta_i \in (0,1)$, $i \in \mathbf{N}$, такие, что $k \times k$-матрица

$$\chi(t_0) > 0;$$

л) наконец, построить гарантированный векторный исход

$$J^p[t_0, x_0] = (J_1(U^*, Z_p, t_0, x_0), ..., J_n(U^*, Z_p, t_0, x_0)),$$

где

$$J_i(U^*, Z_p, t_0, x_0) = x_0'\overline{\Theta}_i(t_0)x_0 - 2m'(t_0)\chi^{-1}(t_0)\overline{\Xi}_i(t_0)x_0 +$$
$$+ m(t_0, x_0)'\chi^{-1}(t_0)\overline{\chi}_i(t_0)\chi^{-1}(t_0)m(t_0, x_0) + 2(\overline{\xi}_i(t_0))'x_0 -$$
$$- 2(\overline{\eta}_i(t_0))'\chi^{-1}(t_0)m(t_0, x_0) + \overline{\omega}_i(t_0),$$

и гарантированный векторный риск

$$\Phi^p[t_0, x_0] = (\Phi_1(U^*, Z_p, t_0, x_0), ..., \Phi_n(U^*, Z_p, t_0, x_0)),$$

где

$$\Phi_i(U^*, Z, t_0, x_0) =$$
$$= x_0'[\Theta_i(t_0) - \overline{\Theta}_i(t_0)]x_0 - 2m'(t_0)\chi^{-1}(t_0)[\Xi_i(t) - \overline{\Xi}_i(t_0)]x_0 +$$
$$+ m(t_0, x_0)'\chi^{-1}(t_0)[\chi_i(t_0) - \overline{\chi}_i(t_0)]\chi^{-1}(t_0)m(t_0, x_0) + 2[\xi_i(t_0) - \overline{\xi}_i(t_0)]'x_0 -$$
$$- 2[\eta_i(t_0) - \overline{\eta}_i(t_0)]'\chi^{-1}(t_0)m(t_0, x_0) + \omega_i(t_0) - \overline{\omega}_i(t_0).$$

Найденная в результате тройка $(U^*, J^p[t_0, x_0], \Phi^p[t_0, x_0])$ и образует гарантированное по исходам и рискам решение многокритериальной динамической задачи (1) - (5) с начальной позицией (t_0, x_0).

Автор благодарит профессора В. И. Жуковского за постановку задачи и обсуждение работы.

Литература

1. Жуковский В. И. Салуквадзе М. Е. Риски и исходы в многокритериальных задачах управления. Тбилиси: Интелекти, 2004.

2. Savage L. Y. The theory of statistical decision. //J. American Statistic Association. 1951. N 46. P. 55 - 67.

3. Zhukovskiy V. I., Salukvadze M.E. The Vector-Valued Maximin. N. Y. etc.: Academic Press, 1994.

4. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.:Наука, 1982.

5. Колемаев В.А. Математическая экономика. М.: ЮНИТИ, 2002.

6. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.:Наука, 1972.

7. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: ГИФМЛ, 1961.

А.Г. Белов, М.В. Уфимцев

ТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕЙМАНА ПОРЯДКА *K*

Введение. В [1], [2] описаны свойства распределения Неймана порядка k, зависящего, при фиксированном k, от двух параметров λ и μ. Такого рода распределение, описывающее события в различных областях науки и бизнеса, относится к классу обобщённых пуассоновских распределений (о.п.р.) бесконечной кратности с производящей функцией вероятностей вида [3, с. 294]

$$P(z)=\sum_{n=1}^{\infty}p_n z^n=\exp\left\{\sum_{l=1}^{\infty}\theta_l\left(z^l-1\right)\right\},|z|\le 1,$$

где, в нашем случае, $\theta_l=\theta_l(\lambda,\mu)=\lambda\frac{\mu^l}{l!}\sum_{j=1}^{k}j^l e^{-j\mu}$. Функция вероятностей (ф.в.) p_n удовлетворяет рекуррентному соотношению [4, с.392]

$$np_n=\sum_{l=1}^{n}l\theta_l p_{n-l}=\lambda\sum_{j=1}^{k}\ e^{-j\mu}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{(j\mu)^{n-l}}{(n-l-1)!}p_l,\ n=1,2,..., \qquad (1)$$

с начальной вероятностью

$$p_0=\exp\left(-\sum_{l=1}^{\infty}\theta_l\right)=\exp\left\{\lambda\sum_{j=1}^{k}e^{-j\mu}-k\lambda\right\}. \qquad (2)$$

В дальнейшем нам понадобятся ещё выражения для производных ф.в. по параметрам λ и μ. Воспользовавшись формулами для производных ф.в. по θ_l [5] и $\theta_l(\lambda,\mu)$ по параметрам λ и μ,

$$\frac{\partial p_n}{\partial\theta_l}=p_{n-l}-p_n,\ p_{-1}=p_{-2}=...=0,$$
$$\frac{\partial\theta_l}{\partial\lambda}=\frac{\mu^l}{l!}\sum_{j=1}^{k}j^l e^{-j\mu},\quad \frac{\partial\theta_l}{\partial\mu}=\lambda\frac{\mu^{l-1}}{(l-1)!}\sum_{j=1}^{k}j^l e^{-j\mu}-\lambda\frac{\mu^l}{l!}\sum_{j=1}^{k}j^{l+1}e^{-j\mu},$$

легко проверить справедливость равенств, приведенных в [1]: