Решетов В.Ю., Перевозчиков А. Г., Лесик И.А.

МОДЕЛЬ ПРЕОДОЛЕНИЯ МНОГОУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЫ ЗАЩИТЫ НАПАДЕНИЕМ

Введение

Рассматривается модель многоуровневой системы защиты на заданном направлении. Эта модель представляет собой частный случай задачи дискретного оптимального управления (ОПУ) терминального типа и может быть решена методом градиентного спуска. Главной проблемой является недифференцируемость и невыпулость липшицевых функций в правых частях уравнения движения и их производных по совокупности переменных, что делает некорректным использование классических результатов, предполагающих дифференцируемость терминального критерия и построения его градиента на основе сопряженной системы.

В предыдущей работе [10] авторов было предложено использовать процедуру осреднения функций в правых частях уравнения движения по совокупности переменных в малой окрестности, радиус которой h считается малым параметром. В результате указанные функции становятся дифференцируемыми по совокупности переменных и для решения полученной аппроксимирующей задачи можно использовать метод градиентного спуска. Для того, чтобы избежать вычисления интегралов от правых частей системы предложенную процедуру рекомендовалось рандомизировать, вводя в правую часть основной и сопряженной системы соответствующие случайные возмущения по совокупности аргументов. По вычислительной сложности предложенный метод стохастического градиентного спуска будет эквивалентен методу градиентного спуска для исходной задачи, но в отличие от него корректен.

В настоящей работе эти результаты получают дальнейшее развитие применительно к общей модели многоуровневой системы защиты, учитывающей воздействие на средства защиты средствами нападения. Таким образом, поставленная задача управления уточняет задачу распределения ресурсов защиты на заданном направлении по уровням в части учета предварительного подавления средств защиты нападением.

1. Простейшая постановка задачи управления многоуровневой защитой

Имеется T уровней защиты с номерами $t = 0,1,...,T-1$. Пусть X и U - общее количество средств нападения и обороны, которые считаются однородными и бесконечно-делимыми. Стратегия обороны состоит в распределении своих средств по уровням защиты в соответствии с вектором:

$$u = (u_0,...,u_{T-1}) \in W = \left\{ u \middle| \sum_{t=0}^{T-1} u_t \le U, u_t \ge 0, t = 1,...,T-1 \right\} . \qquad (1)$$

Пусть x_t – количество средств нападения противника, прорвавшихся к t – му уровню защиты на заданном направлении, $t = 0,1,...,T-1$. Динамика системы описывается уравнением:

$$x_{t+1} = F_t(x_t, u_t), t = 0,1,...,T-1, \qquad (2)$$

с начальным условием:

$$x_0 = X . \qquad (3)$$

Функции $F_t(.,.)$ в (2) и величина X в (3) считаются известными обороне. Например, в простейшем случае, рассмотренном в [10], функции $F_t(.,.)$ имели вид:

$$F_t(x_t, u_t) = \max\{q_t x_t, x_t - p_t u_t\}, t = 0,1,...,T-1. \qquad (4)$$

Здесь p_t – вероятность поражения средства нападения противника одним воздействием на t – м рубеже, $q_t = 1 - p_t$ – соответствующая вероятность непоражения.

Критерий обороны в [10] определялся, как количество x_T средств нападения, преодолевших все рубежи защиты на данном направлении:

$$I(u) = \Phi(x_T) \equiv x_T .$$

(5)

Требуется так распределить средства защиты по уровням, чтобы минимизировать количество x_T средств нападения, преодолевших все рубежи защиты на данном направлении:

$$I^* = \min_{u \in W} I(u) \qquad (6)$$

Задача (1)-(6) является задачей оптимального дискретного управления (ОПУ) с общими ограничениями на управляющие воздействия $u_t, t = 0,1,...,T-1$.

Другие задачи преодоления защиты, с использованием функций максимума типа (4) в игровой постановке изучались в [1]. А именно в [1] изучалась задача распределения ресурсов по направлениям $i = 1,...,n$ на одном уровне защиты, которую в наших обозначениях можно сформулировать следующим образом. Пусть P_t – вероятность поражения средства нападения противника одним воздействием на $i-$м направлении, $Q_t = 1 - P_t$ - соответствующая вероятность непоражения.

Требуется решить антагонистическую игру с функцией выигрыша нападения, представляющей собой общее количество прорвавшихся средств нападения:

$$f(X,U) = \sum_{i=1}^{n} \max\{0, X_i - P_i U_i\}.$$

Пусть V и Y - количество средств нападения и защиты. Стратегия обороны состоит в распределении своих средств по направлениям защиты в соответствии с вектором:

$$U = (U_1,...,U_n) \in A = \{U | \sum_{i=1}^{n} U_i \le V, U_i \ge 0, i = 1,...,n\} .$$

Стратегия нападения состоит в распределении своих средств по направлениям в соответствии с вектором:

$$X = (X_1,..., X_n) \in B = \{X | \sum_{t=1}^{n} X_i \le Y, X_i \ge 0, i = 1,..., n\}$$

Используя выпуклость функции $f(X,U)$ по U, для этой антагонистической игры было доказано в частности (см., например, [1]), что минимакс:

$$v = \min_{U \in A} \max_{X \in B} f(x,u) = \min_{U \in A} \max_{i=1,...,n} f\left(X^{(i)}, U\right) \qquad (7)$$

будет значением игры и минимаксная стратегия обороны оптимальна. Здесь $X^{(i)} = (0,..., X,...0)$, где X стоит на i-м месте, а остальные координаты равны нулю. При этом оптимальной стратегией нападения является смешанная стратегия, состоящая в том, чтобы сосредоточить все силы на одном направлении в соответствии с оптимальным распределением вероятностей, которое может быть получено по формулам, также приведенным в [1].

Сопоставляя поставленную в [10] задачу (6) управления ресурсами обороны с последним минимаксом в (7), убеждаемся, что можно рассматривать задачу (6) как другой способ определения функции f в (7):

$$f(X^{(i)}, U) = \max\{0, X - P_i U_i\}, \qquad (8)$$

Более, того в [10] было показано, что при $p_t \equiv p, q_t \equiv q$ и отсутствии предварительного подавления средств защиты нападением имеет место формула

$$I^* = \max\{q^T X, X - pU\}, \qquad (9)$$

аналогичная (8). Поэтому функцию выигрыша первого игрока в [1] можно было бы определить формулой:

$$f(X,U) = \sum_{i=1}^{n} \max\{Q_i^T X_i, X_i - P_i U_i\}. \qquad (10)$$

Таким образом, поставленная задача управления (6) уточняет игровую задачу в [1] в части дополнительного распределения ресурсов защиты на заданном направлении по уровням и учитывает дополнительно возможность предварительного подавления средств защиты нападением.

2. Постановка общей задачи управления многоуровневой защитой

Пусть $T_{нап}$ - общая продолжительность удара нападения, известная защите, x_t – количество средств нападения противника, прорвавшихся к t – му уровню защиты на заданном направлении, $t = 0,1,...,T-1$. Далее, пусть u_t – количество средств защиты, которые действуют по противнику на t – м уровне защиты.

Предположим, что каждое средство защиты может действовать только на одном рубеже и воздействовать лишь по одному средству нападения, и обратно - на каждую цель на данном уровне защиты может назначаться только одно средство защиты. Более сложные случаи, когда одно средство обороны может действовать на нескольких рубежах и по нескольким целям одновременно (многоканальность по целям) и по одной цели нападения может назначаться несколько средств обороны, предполагается рассмотреть в последующих работах. О возможности учета неоднородности средств обороны в предлагаемой модели будет сказано ниже (см. замечание 1).

Мы будем рассматривать только программные стратегии защиты. Стратегии с обратной связью или стратегии в форме синтеза рассматриваются только в последнем разделе для построения эвристического алгоритма решения по принципу оптимизации обороны эшелон за эшелоном, использующего специфику задачи.

Замечание 1. Выбор программных стратегий связан с тем, что предполагаемые расчеты проводятся не в целях моделирования действий в ходе реального конфликта, а для априорной оценки эффективности защиты. При этом предполагается, что противник на данном направлении будет действовать всеми силами, общее количество которых известно защите заранее. Уверенность в этом зиждется не на теореме в [1] а на законах военного искусства, которые исходят из того, что противнику, обладающему для этого достаточной маневренностью, выгодно все силы сосредоточить на одном направлении, а защите в силу недостаточной маневренности приходится растягивать свою оборону по фронту.

Мы будем исходить из того, что противник осуществляет подавление средств защиты на каждом уровне системы защиты на заданном направлении. Предположим исходя из принципа симметрии моделей обороны и защиты, использованного в [1], что каждое средство нападения может действовать на каждом рубеже лишь по одному средству защиты, и обратно - на каждое средство защиты на данном уровне защиты может назначаться только одно средство нападения. Более сложные случаи, когда одно средство нападения может действовать по нескольким средствам обороны на данном рубеже одновременно и по одному средству защиты может назначаться несколько средств обороны, предполагается рассмотреть в последующих работах. Тогда по аналогии с защитой фактическое количество предварительных воздействий нападения m_t по средствам защиты на $t-$м уровне защиты получается, как минимум из общего числа x_t средств нападения противника и числа средств защиты u_t, которое действует по противнику на $t-$м уровне:

$$m_t = \min\{x_t, u_t\}. \tag{11}$$

Теперь среднее число оставшихся средств защиты, действующих на $t-$м уровне, можно определить по формуле:

$$u_t^0 = u_t - P_t m_t = u_t - P_t \min\{x_t, u_t\} = \max\{Q_t u_t, u_t - P_t x_t\}. \tag{12}$$

Здесь $P_t -$ вероятность поражения средства обороны одним воздействием противника на $t-$м рубеже, $Q_t = 1 - P_t -$соответствующая вероятность не поражения.

Заметим, что при выводе формулы (12) мы использовали пессимистический сценарий, состоящий в том, что на каждом уровне защиты противник первым подавляет средства обороны назначенные действовать на этом уровне защиты, которые могут нанести ответное воздействие лишь в случае их непоражения. Оптимистический сценарий, состоял бы, наоборот, в обратном порядке воздействий противников на каждом рубеже. Реалистический сценарий может состоять в том, что рассматривается в каком-то смысле промежуточный вариант дуэльного типа, но соответствующим образом упрощенный, в соответствии с общей идеологией модели оборона-нападения в изложении [1]. В настоящей работе рассматривается пессимистический сценарий обмена ударами на каждом уровне защиты, как наиболее тяжелый для обороны исходя из принципа гарантированного результата.

Пусть предельное количество воздействий r_t по противнику одним боеспособным средством защиты получается как минимум из числа воздействий, рассчитываемых априорно как экзогенный фактор по его скорострельности r_C^t в зависимости от предполагаемой длительности удара, и числа воздействий $r_Б^t$ по имеющемуся у него количеству боекомплектов:

$$r_t = \min\{r_C^t, r_Б^t\} \tag{13}$$

Тогда среднее количество воздействий средств защиты n_t по противнику на $t-$м уровне получается, как минимум из общего числа x_t средств нападения противника и среднего числа воздействий $u_t^0 r_t$ средств защиты u_t^0, которые остались на $t-$м уровне:

$$n_t = \min\{x_t, u_t^0 r_t\}. \qquad (14)$$

Теперь среднее число средств, преодолевших $t-$й уровень, можно определить по формуле:

$$\begin{aligned} & x_{t+1} = x_t - p_t n_t = x_t - p_t \min\{x_t, u_t^0 r_t\} = \max\{q_t x_t, x_t - p_t u_t^0 r_t\} = F_t(x_t, u_t), \\ & t = 0,1,...,T-1, x_0 = x. \end{aligned} \qquad (15)$$

Здесь $p_t -$ вероятность поражения средства нападения противника одним воздействием защиты на $t-$м уровне, $q_t = 1 - p_t -$соответствующая вероятность непоражения.

Подставляя в (15) формулу (12) для среднего числа u_t^0 оставшихся боеспособными средств защиты действующих на $t-$м уровне, можно получить окончательное выражение для функции $F_t(x_t, u_t)$ в правой части уравнения движения системы:

$$\begin{aligned} & F_t(x_t, u_t) = \max\{q_t x_t, x_t - p_t r_t \max(u_t - P_t x_t, Q_t u_t)\} = \\ & = \max\{q_t x_t, \min[x_t(1 + p_t r_t P_t) - p_t r_t u_t, x_t - p_t r_t Q_t u_t]\}. \end{aligned} \qquad (16)$$

Требуется так распределить средства защиты по уровням, чтобы минимизировать количество x_T средств нападения, преодолевших все рубежи защиты на данном направлении. Заметим, что в силу наличия операторов максимума и минимума в правой части (16) функция $F_t(x_t, u_t)$ в правой части уравнения движения (15) системы будет невыпуклой. Это обстоятельство не позволяет утверждать, что минимакс (7) дает значение для соответствующей игры типа [1], и что соответствующая гарантированная стратегия обороны оптимальны. Однако можно вычислить гарантированный результат обороны и соответствующую гарантирующую стратегию обороны используя последний минимакс в (7), что и является целью обороны в этом случае (см., например, [3]).

3. Точная формула для вероятности обстрела цели на каждом рубеже

При выводе формулы (15), частным случаем которой является формула (4), предполагается неявно, что математическое ожидание от функции равно функции от математического ожидания. Однако это верно только для линейных функций. Для обоснования точной формулы можно использовать модель системы массового обслуживания (СМО) с отказами по следующей схеме. Пусть $\tau_ц^t$ - среднее время цикла стрельбы одного средства защиты для обстрела цели на $t-$ом рубеже. Тогда плотность стрельбы есть величина $\mu_t = 1/\tau_ц^t$. Обозначим через $\lambda_t = x_t / T_{нал}$ - соответствующую плотность потока целей на $t-$ом рубеже, а через $\alpha_t = \lambda_t / \mu_t = x_t \tau_ц^t / T_{нал} = x_t / r_t$ - их отношение. Здесь $r_t = T_{нал} / \tau_ц^t$ - предельное количество воздействий по противнику одним средством защиты. Тогда вероятность обстрела P_t^0 одного средства нападения на $t-$ом рубеже может при обычных предположениях пуассоновости всех потоков событий может быть получена по формуле Эрланга для u_t –канальной СМО с отказами [13]:

$$P_t^0 = \frac{R(u_t - 1, \alpha_t)}{R(u_t, \alpha_t)}.$$

Здесь

$$R(n, \alpha) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} -$$

функция Пуассоновского распределения, табулированная в [13]. При $\alpha > 20$ функцию $R(m, \alpha)$ можно аппроксимировать нормальной функцией распределения [13]:

$$R(m, \alpha) \approx \Phi * \left(\frac{m + 0{,}5 - \alpha}{\sqrt{\alpha}} \right).$$

Здесь

$$\Phi * (x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt -$$

функция нормального распределения, табулированная в [13].

Отсюда получаем следующую приближенную формулу для вероятности обстрела одной цели на $t-$ом рубеже в стохастической модели СМО (далее для краткости – стохастической модели):

$$P_t^0 = P_t^0(x_t, u_t) \approx \Phi * \left(\frac{u_t - 0{,}5 - x_t / r_t}{\sqrt{x_t / r_t}} \right) / \Phi * \left(\frac{u_t + 0{,}5 - x_t / r_t}{\sqrt{x_t / r_t}} \right).$$

В отличие от исходной формулы Эрланга, аппроксимирующая функция определена для нецелых значений u_t и непрерывно дифференцируема по u_t, что будет важно дальше при построении градиентных методов оптимизации.

Величина $\alpha_t = x_t / r_t$ имеет смысл минимального количества средств защиты на $t-$ом рубеже, при котором все цели будут обстреляны.

Для сравнения в формуле (15) фактически используется приближенная формула для вероятности обстрела одной цели на $t-$ом рубеже в общей детерминированной модели (далее для краткости – детерминированной модели):

$$P_t^0 = P_t^0(x_t, u_t) = \min(1, \frac{r_t u_t}{x_t}) = \min(1, \frac{u_t}{\alpha_t}).$$

Пример 1 . Предположим, что $\alpha_t = 20$, т.е. нужно не меньше 20 средств обороны, чтобы все цели были обстреляны в детерминированной модели. Спрашивается, какова при этом будет вероятность обстрела в стохастической модели $n-$канального СМО? Некоторое представление об указанных вероятностях дает следующая таблица:

Таблица 1

количество средств обороны u_t	0	3	5	10	20	∞
P_t^0 в стохастической модели	0	0,00	0,26	0,55	0,85	1
P_t^0 в детерминированной модели	0	0,15	0,25	0,50	1,00	1

Видно, что при $n=20$ средств вероятность обстрела будет монотонной, не выпуклой и не вогнутой функцией от количества средств ПВО u_t.

Возвратимся к простейшей модели СМО системы эшелонированной защиты. Среднее число средств, преодолевших $t-$й рубеж, можно определить теперь по формуле:

$$x_0 = X, x_{t+1} = x_t(1 - p_t P_t^0(x_t, u_t)) \approx$$
$$\approx x_t(1 - p_t \Phi * \left(\frac{u_t - 0{,}5 - x_t / r_t}{\sqrt{x_t / r_t}} \right) / \Phi * \left(\frac{u_t + 0{,}5 - x_t / r_t}{\sqrt{x_t / r_t}} \right)), t = 0{,}1{,}...{,}T-1,$$

где $X-$ общее количество однородных в простейшем случае средств нападения, действующих на данном направлении. Вот какую нелинейную зависимость аппроксимирует формула (15) и в частности ее следствие (4). Точную нелинейную зависимость предполагается рассмотреть в отдельной статье, поскольку это выходит за рамки настоящей работы и требует отдельного изучения.

4. Общая постановка вспомогательной задачи дискретного ОПУ

Рассмотрим вспомогательную задачу дискретного оптимального управления (ОПУ) со свободным правым концом, частным случаем которой является общая задача управления многоуровневой системой защиты без учета общих ограничений (1) на управляющие воздействия. Эта задача может быть записана в виде:

$$\begin{gathered} I([u_t]) = \sum_{t=0}^{T-1} F_t^0(x_t, u_t) + \Phi(x_T) \to \min; \\ x_{t+1} = F_t(x_t, u_t), t = 0{,}1{,}...{,}T-1; x_0 = a; \\ x_t \in E^n, [u_t] = (u_0, u_1, ..., u_{T-1}), u_t \in V_t \subset E^r, \\ t = 0{,}1{,}...{,}T-1; F_t = (F_1^1, ..., F_t^n). \end{gathered} \tag{17}$$

Вспомогательная задача (17) со свободным правым концом трактуется просто как на неявный способ определения значения критерия $I([u_t])$.

Это позволяет рассматривать задачу минимизации этого критерия при условии (1) как конечномерную задачу математического программирования. И применить для ее решения комбинированный метод использующий градиенты критерия и агрегированной функции в ограничении типа неравенства (см. [5]), вместо метода проекции градиента, поскольку проектирование на такое множество само по себе уже представляет задачу квадратичного программирования.

Функции $\Phi, F_t, F_t^0, t = 0,1,...,T-1,$ в (17) предполагаются непрерывными вместе со своими производными по x, u, множества допустимых управляющих воздействий V_t - выпуклы, замкнуты и ограничены. Пусть кроме того функции F_t являются липшицевыми по совокупности переменных в области определения с единой константой $L > 0$.

Градиент критерия. Введем функцию Гамильтона:

$$H_t(x_t, \psi_t, u_t) = \langle \psi_t, F_t(x_t, u_t) \rangle + F_t^0(x_t, u_t), \tag{18}$$

где $\psi_t \in E^n$ - сопряженные переменные, $\langle .,. \rangle$ – скалярное произведение векторов в E^n.

Введем сопряженную систему:

$$\psi_{t-1} = \frac{\partial H_t(x_t, \psi_t, u_t)}{\partial x}, t = T-1,...,1; \psi_{T-1} = \frac{\partial \Phi(x_T)}{\partial x}. \tag{19}$$

Через $L_2^T[0,T]$ обозначим гильбертово пространство вектор-функций дискретной переменной $[u_t] = (u_0, u_1, ..., u_{T-1})$ со скалярным произведением и нормой, заданными соответственно формулами:

$$\langle [u_t], [v_t] \rangle_{L_2} = \sum_{t=0}^{T-1} \langle u_t, u_t \rangle_{E^r}; \| [u_t] \| = \left(\sum_{t=0}^{T-1} |u_t|_{E^r}^2 \right)^{1/2}.$$

Тогда критериальная функция в (17) непрерывна и дифференцируема в норме $L_2^T[0,T]$, причем ее градиент $I'([u_t])$ представляется в виде:

$$I'([u_t]) = \{H_{tu}(x_t, \psi_t, u_t), t = 0,1,...,T-1\} \in L_2^T[0,T], \tag{20}$$

где x_t, ψ_t - решения основной и сопряженной системы, соответствующие выбранному управлению $[u_t]$.

В частности для общей задачи управления многоуровневой системой защиты имеем:

$$F_t^0 = 0;$$
$$F_t = \max\{q_t x_t, \min[x_t(1 + p_t r_t P_t) - p_t r_t u_t; x_t - p_t r_t Q_t u_t]\} \in E^1;$$
$$\Phi \equiv x_T;$$
$$x_t \in E^1, u_t \in E^1; V_t = [0, v_t] \subset E^1;$$
$$t = 0,1,...,T-1.$$

Функция Гамильтона будет иметь вид:

$$H_t(x_t, \psi_t, u_t) = \psi_t F_t(x_t, u_t) + F_t^0(x_t, u_t) =$$
$$= \psi_t \max\{q_t x_t, \min[x_t(1 + p_t r_t P_t) - p_t r_t u_t; x_t - p_t r_r Q_t u_t]\}.$$

Функция $F_t(x_t,u_t)$, определенная равенством (16), будет в общем случае невыпуклой. Поскольку функция минимума в (16) - выпуклая по x_t и ее график испытывает излом в точке $x_t=u_t$, то условие невыпуклости функции (16) состоит в том, что значение функции $x_t q_t$ в точке излома строго больше, чем значение функции минимума:

$$u_t q_t < u_t(1-p_t r_t Q_t),$$

что эквивалентно условию:

$$r_t Q_t < 1. \tag{21}$$

Неравенство (21) можно интерпретировать как условие того, что ожидаемое количество воздействий, которое может нанести одно средство защиты на $t-$ м уровне после его предварительного подавления противником, будет меньше единицы.

В случае когда неравенство (21), выполняется важно знать точку $x_t=u_t^0 \le u_t$, в которой пересекаются графики функций $x_t(1+p_t r_t P_t)-p_t r_t u_t$ и $x_t q_t$:

$$u_t^0=\frac{r_t}{r_t P_t+1}u_t. \tag{22}$$

А в случае, когда неравенство (28) нарушается, важно знать точку $x_t=u_t^1 > u_t$, в которой пересекаются графики функций $x_t - p_t r_t Q_t u_t$ и $x_t q_t$:

$$u_t^1=r_t Q_t u_t. \tag{23}$$

Зная эти характерные точки, можно записать кусочно-линейную функцию $F_t(x_t,u_t)$ в (16) в виде:

$$F_t(x_t,u_t)=\begin{cases} q_t x_t,\ x_t \le u_t^0 \\ x_t(1+p_t r_t P_t)-p_t r_t u_t,\ u_t^0 < x_t \le u_t \\ x_t - p_t r_t Q_t u_t,\ x_t > u_t \end{cases}, \tag{24}$$

в случае $r_t Q_t < 1$, или

$$F_t(x_t,u_t)=\begin{cases} q_t x_t,\ x_t \le u_t^1 \\ x_t - p_t r_t Q_t u_t,\ x_t > u_t \end{cases}, \tag{25}$$

в случае $r_t Q_t \ge 1$.

Производные функции $F_t(x_t,u_t)$ по x кусочно-постоянны и имеют вид:

$$F_{tx}(x_t,u_t)=\begin{cases} q_t,\ x_t \le u_t^0 \\ 1+p_t r_t P_t,\ u_t^0 < x_t \le u_t \\ 1,\ x_t > u_t \end{cases}, \tag{26}$$

в случае $r_t Q_t < 1$, или

$$F_{tx}(x_t,u_t)=\begin{cases} q_t,\ x_t \le u_t^1 \\ 1,\ x_t > u_t \end{cases}, \tag{27}$$

в случае $r_t Q_t \geq 1$.

Производные функции $F_t(x_t, u_t)$ по u кусочно-постоянны и имеют вид:

$$F_{tu}(x_t, u_t) = \begin{cases} 0, x_t \leq u_t^0 \\ -p_t r_t, u_t^0 < x_t \leq u_t; r_t Q_t \leq 1; \\ -p_t r_t Q_t, x_t > u_t \end{cases} \tag{28}$$

или

$$F_{tu}(x_t, u_t) = \begin{cases} 0, x_t \leq u_t^1 \\ -p_t r_t Q_t, x_t > u_t \end{cases}; r_t Q_t > 1. \tag{29}$$

Таким образом, производные функции $F_t(x_t, u_t)$ разрывны (для определенности – полунепрерывны слева) и условия существования градиента не выполняются. К вопросу корректности полученной схемы вернемся позже, а пока формально выпишем все необходимые соотношения для общей модели многоуровневой системы защиты.

Сопряженная система будет иметь вид:

$$\psi_{t-1} = \frac{\partial H_t(x_t, \psi_t, u_t)}{\partial x} = \psi_t \begin{cases} q_t, x_t \leq u_t^0 \\ 1 + p_t r_t P_t, u_t^0 < x_t \leq u_t, \\ 1, x_t \geq u_t \end{cases} \tag{30}$$

если условие (21) выполняется, и

$$\psi_{t-1} = \frac{\partial H_t(x_t, \psi_t, u_t)}{\partial x} = \psi_t \begin{cases} q_t, x_t \leq u_t^1 \\ 1, x_t > u_t^1 \end{cases}, \tag{31}$$

если условие (21) не выполняется, $t = T-1,...,1$.

Конечное условие сопряженной системы будет иметь вид:

$$\psi_{T-1} = \frac{\partial \Phi(x_T)}{\partial x} = 1. \tag{32}$$

Компоненты градиента (30) критерия имеют вид:

$$\begin{aligned} H_{tu}(x_t, u_t, \psi_t) &= \psi_t F_{tu}(x_t, u_t) = \\ &= \psi_t \begin{cases} 0, x_t \leq u_t^0 \\ -p_t r_t, u_t^0 < x_t \leq u_t, \\ -p_t r_t Q_t, x_t \geq u_t \end{cases} \end{aligned} \tag{33}$$

если условие (21) выполняется, и

$$\begin{aligned} H_{tu}(x_t, u_t, \psi_t) &= \psi_t F_{tu}(x_t, u_t) = \\ &= \psi_t \begin{cases} 0, x_t \leq u_t^1 \\ -p_t r_t Q_t, x_t \geq u_t^1 \end{cases}, \end{aligned} \tag{34}$$

если условие (21) не выполняется, $t = T-1,...,1$.

5. Комбинированный метод последовательных приближений и сглаживание задачи

Имея градиент (30), (31) для решения общей задачи можно теперь применить комбинированный метод использующий градиенты критерия и агрегированной функции в ограничении типа неравенства типа [5] с программным шагом:

$$u_t(k+1)=\begin{cases} P(u_t(k)-a_k H_{u_t}(x_t(k),\psi_t(k),u_t(k)),\ g(u(k))\le 0; \\ P(u_t(k)-a_k s);\ g(u(k))>0; \end{cases};\ t=0,...,T-1, \qquad (62)$$

$k=1,2,...$

где k – номер шага; $a_k = Dk^{-s}$ - программный шаг метода, $1/2<s\le 1,$ – параметр, например $s=3/4$; D - характерный размер множества допустимых решений задачи, например оценка диаметра; $g(u)=\sum u_t - U$ - функция в ограничении (1) задачи; $s=(1,...,1)'\in E^T$ - ее градиент;

$$P(u_t)=\begin{cases} 0, u_t\le 0 \\ u_t, 0<u_t\le v_t \\ v_t, u_t>v_t \end{cases}$$

- оператор проектирования на отрезок $V_t=[0,v_t]$ допустимых управляющих воздействий u^t.

Главной проблемой в обосновании метода Поляка является недифференцируемость липшицевых функций в правых частях уравнения движения и их производных по совокупности переменных, что делает некорректным использование классических результатов о дифференцируемости терминального критерия и построения его градиента на основе сопряженной системы. Для решения этой проблемы предлагается использовать процедуру осреднения функции $F_t(x_t,u_t)$ в правой части уравнения движения по совокупности переменных x_t,u_t в малой окрестности, радиус которой h считается малым параметром. Величина $h>0$ задает точность аппроксимации функции $F_t(x_t,u_t)$ ее осредненной функцией:

$$F_t^h(x_t,u_t)=\int_{E^2} F_t(x_t+h\rho_1,u_t+h\rho_2)\omega_2(\|\rho\|_0)d\rho_1 d\rho_2. \qquad (36)$$

Ядро осреднения здесь определяется, например, по формуле [4]:

$$\omega_2(\|\rho\|_0)=\begin{cases} 2^{-2}, \rho\in O_2 \\ 0, \upsilon\notin O_2 \end{cases}. \qquad (37)$$

Здесь

$$O_2=\{\rho\in E^2 \|\rho\|_0\le 1\}, \|\rho\|_0=\max_{i=1,2}|\rho_i|. \qquad (38)$$

Известно [4], что осредненная функция от липшицевой функции будет дифференцируемой и справедлива оценка:

$$\left|F_t^h(x_t,u_t)-F_t(x_t,u_t)\right|\le Lh, \qquad (39)$$

где L - соответствующая константа Липшица.

В результате осреднения функции $F_t^h(x_t,u_t)$ становятся дифференцируемыми по совокупности переменных, причем производные от средних функций равны среднему от производных, т.е. справедливы равенства:

$$F_{tx}^h(x_t,u_t)=\int_{E^2}F_{tx}(x_t+h\rho_1,u_t+h\rho_2)\omega_2\left(\|\rho\|_0\right)d\rho_1 d\rho_2\,,$$

и

$$F_{tu}^h(x_t,u_t)=\int_{E^2}F_{tu}(x_t+h\rho_1,u_t+h\rho_2)\omega_2\left(\|\rho\|_0\right)d\rho_1 d\rho_2\,.$$

Заметим, что производные от липшицевых функций под интегралами здесь существуют почти всюду и измеримы и, следовательно, интегрируемы в силу ограниченности соответствующей константой Липшица $L>0$.

Для решения полученной аппроксимирующей задачи можно использовать метод градиентного спуска. В силу результатов [6] критерий полученной задачи аппроксимирует исходный критерий с точностью $O(h)$ и, следовательно, можно утверждать, что полученная задача аппроксимирует исходную задачу по значению с такой же точностью. Более того, в случае выпуклости критерия исходной задачи из результатов [8] следует, что любая стационарная точка аппроксимирующей задачи будет принадлежать $O(\sqrt{h})-$окрестности $O(\sqrt{h})-$стационарного множества [7] исходной задачи. В силу замкнутости $O(\sqrt{h})-$субдифференциального отображения [7] решение аппроксимирующей задачи при достаточно малом $h>0$ может быть сколь угодно близко к стационарному множеству исходной задачи, совпадающему с множеством ее оптимальных решений в случае ее выпуклости, что эквивалентно условию противоположному (21):

$$r_t Q_t \ge 1.$$

Неравенство противоположное (21) можно интерпретировать как условие того, что ожидаемое количество воздействий, которое может нанести одно средство защиты на $t-$ м уровне после его предварительного подавления противником, будет не менее единицы.

Для того, чтобы избежать вычисления интегралов от правых частей системы, предложенную процедуру следует рандомизировать, вводя в правую часть основной и сопряженной системы соответствующие случайные возмущения по совокупности аргументов. Получим уравнения:

$$\tilde{x}_{t+1}(k)=F_t^h(\tilde{x}_t(k),u_t(k));t=0,1,...,T-1;\tilde{x}_0(k)=a. \qquad (40)$$

и

$$\tilde{\psi}_{t-1}(k) = \frac{\partial H_t(\tilde{x}_t(k) + h\nu_t^k, \tilde{\psi}_t(k), u_t(k) + h\eta_t^k)}{\partial x}; t = T-1,...,1;$$
$$\tilde{\psi}_{T-1}(k) = \frac{\partial \Phi(\tilde{x}_T(k))}{\partial x} = 1. \quad (41)$$

Замечание 2. Производные функции Гамильтона в (41) существуют почти наверное (п.н.).

Компоненты стохастического градиента [3] терминального критерия (20) имеют вид:

$$H_{tu}(\tilde{x}_t(k), \tilde{\psi}_t(k), u_t(k)) = \tilde{\psi}_t(k) F_{tu}(\tilde{x}_t(k) + h\sigma_t^k, u_t(k) + h\tau_t^k); t = 0,1,...,T-1. \quad (42)$$

Производные функции Гамильтона здесь существуют почти наверное.

Пусть величины $\nu_t^k, \eta_t^k, \sigma_t^k, \tau_t^k$ для любого $t = 0,1,...,T-1$ представляют собой независимые комплекты k – й независимой реализации случайной величины (с.в.) ρ, равномерно распределенной (р.р.) на $O_1 = [-1,1]$. Такие комплекты могут быть получены при помощи датчика случайных чисел. Тогда в силу результатов [4] случайный процесс (35), в котором компоненты градиента заменены компонентами стохастического градиента (42), почти наверное в некотором вероятностном пространстве сходится по значению к стационарному множеству осредненной задачи в смысле [4], которая аппроксимирует исходную задачу с точностью $O(h)$. По вычислительной сложности предлагаемый метод стохастического градиентного спуска будет эквивалентен комбинированному методу использующему градиенты критерия и агрегированной функции в ограничении типа неравенства, но в отличие от него корректен для этой задачи.

Замечание 3. Результаты [4], полученные для статических конечномерных оптимизационных задач с липшицевыми критериями по сходимости метода обобщенного стохастического градиента, можно применять к изучаемой задаче дискретного ОПУ в силу ее эквивалентности некоторой статической конечномерной задачи большей размерности (см. [3]).

6. Последовательное распределение ресурсов обороны и проверка практической сходимости алгоритма.

Предположим, что базовые вероятности P_t, p_t, r_t не зависят от t, тогда ресурс обороны можно распределять от рубежа к рубежу, положив в (14) $x_t = u_t^0 r_t$, откуда следует:

$$u_t^0 = \frac{x_t}{r_t}.$$

Это позволяет определить потребное значение u_t из равенства (14):

$$u_t^0 = \max\{Q_t u_t, u_t - P_t x_t\} = \frac{x_t}{r_t}. \quad (43)$$

Функция максимума в (43) испытывает излом в точке $u_t = x_t$. Значение ее в точке излома составляет $Q_t x_t$. Рассматривая случаи $x_t / r_t \le Q_t x_t$ и $x_t / r_t > Q_t x_t$, приходим к формуле для решения уравнения (43):

$$u_t = \begin{cases} \dfrac{x_t}{Q_t r_t}, Q_t r_t \ge 1 \\ x_t\left(1 + \dfrac{1-Q_t}{r_t}\right), Q_t r_t < 1 \end{cases}. \qquad (44)$$

Величину $Q_t r_t$ можно интерпретировать как математическое ожидание числа воздействий одного средства обороны в результате его предварительного подавления нападением.

Последовательно определяя потребное количество средств обороны по рубежам $t = 1,2,...,T-1$ по формуле (43) с использованием уравнения движения (15) до исчерпания общего ресурса обороны получим оптимальное решение исходной задачи. Доказательство этого факта проводится так же, как в это было сделано в работе [10] без учета предварительного подавления обороны нападением. Это позволяет тестировать численный алгоритм из п.п.4 на предмет его практической сходимости в выпуклом случае $Q_t r_t \ge 1$.

Замечание 5. Предложенный алгоритм последовательного распределения ресурсов обороны использует стратегии (44) с обратной связью или стратегии в форме синтеза. В общем случае, когда базовые вероятности P_t, p_t, r_t зависят от t, он представляет собой лишь эвристический алгоритм решения, использующего специфику задачи.

Замечание 6. Алгоритм последовательного распределения ресурсов обороны опирается на ограничение (1), которое представляет собой лишь частный случай такого рода ограничений для задачи с различными типами средств защиты и нападения, предполагающий решение задачи целераспределения на каждом уровне. В последнем случае уже принципиально нельзя построить оптимальный алгоритм, действующий по принципу от рубежа к рубежу, как нельзя сделать это в транспортной задаче с неуравновешенным балансом, лежащей в основе алгоритма целераспределения.

Пример 2. Пусть $T = 1; Q_t = q_t \equiv 0{,}1; P_t = p_t \equiv 0{,}9; r_t = 15; X = 150$. Тогда $Q_t r_t \equiv 1{,}5 \ge 1$, т.е. имеет место случай выпуклости и метод последовательных приближений должен сходится с вероятностью единица к решению задачи при $h \to 0$. Требуется найти оптимальное решение по формулам (12), (15), (44) без ограничения (1) на общий ресурс защиты.

Решение. Первый шаг. По формуле (44) получаем: $u_0 = x_0 /(Q_t r_t) = 150/1{,}5 = 100$. Отсюда по формуле (12) при $t = 0$ получим: $u_t^0 = \max\{Q_t u_t, u_t - P_t x_t\} = \max\{0{,}1 \cdot 100; 100 - 0{,}9 \cdot 150\} = 10.$

Теперь по формуле (15) при $t = 0$ имеем: $x_{t+1} = \max\{q_t x_t, x_t - p_t u_t^0 r_t\} = \max\{0{,}1 \cdot 150; 150 - 0{,}9 \cdot 10 \cdot 15\} = 15$.

Второй шаг. По формуле (44) получаем: $u_1 = x_1 /(Q_t r_t) = 15/1{,}5 = 10$. Отсюда по формуле (12) при $t = 1$ получим: $u_t^0 = \max\{Q_t u_t, u_t - P_t x_t\} = \max\{0{,}1 \cdot 10; 10 - 0{,}9 \cdot 15\} = 1.$

Теперь по формуле (15) при $t = 1$ имеем: $x_{t+1} = \max\{q_t x_t, x_t - p_t u_t^0 r_t\} = \max\{0{,}1 \cdot 15; 15 - 0{,}9 \cdot 1 \cdot 15\} = 1{,}5$. Этот результат имеет простой смысл при оптимальных значениях величин $u_0{*} = 100, u_1{*} = 10$ все цели на обоих рубежах будут обстреляны и общее число прорвавшихся средств нападения составит $x_2 = qx_1 = q^2 x_0 = 0{,}01 \cdot 150 = 1{,}5$.

Таким образом, без ограничения (1) на общий ресурс защиты минимальное значение критерии $I{*} = 1{,}5$. При этом использован суммарный ресурс защиты $U = u_0 + u_1 = 110$. Поэтому такое же решение будет оптимальным с ограничением (1) на общий ресурс защиты, если общее количество ресурсов защиты равно $U = 110$.

Особенности численной реализации и результаты эксперимента по проверке практической сходимости предложенного алгоритма в виду их сложности предполагается изложить в отдельной работе.

Заключение

В настоящей работе показано как рандомизировать процедуру градиентного спуска в общей задаче управления системой эшелонированной обороны, чтобы она стала корректной для недиффернцируемых функций в правых частях системы и получена формула для ее стохастического градиента в смысле [4]. Это позволяет применить численный метод использующему градиенты критерия и агрегированной функции в ограничении типа неравенства [5] для ее решения, хорошо справляющегося со сложными ограничениями типа неравенств. Другие подходы к изучению динамических игр и список первоисточников можно найти в [11,12].

Список литературы

1 Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

2 Демьянов В.Ф, Малоземов В.Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.

3 Федоров В.В. Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.
4 Михалевич В.С., Гупал А.М., Норкин В.И. Методы невыпуклой оптимизации. М.: Наука, 1987.
5 Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
6 Васильев Ф.П.Методы решения экстремальных задач: М.: Наука, 1981.
7 Завриев С.К., Перевозчиков А.Г. Стохастический конечно-разностный алгоритм минимизации функции максимина. Журнал вычислительной математики и математической физики, № 4, Т. 30, 1991, с.629-633.
8 Перевозчиков А.Г. Уклонение графиков сферических изображений. В Межвузовском тематическом сборнике научных трудов «Применение функционального анализа в теории приближений». – Тверь: Изд-во ТвГУ, вып.4, 1974, с.84-91.
9 Ашманов С.А. Линейное программирование. – М.: Наука, 1981.
10 Перевозчиков А.Г., Лесик И.А. Простейшая модель эшелонированной противовоздушной обороны. Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика, № 3 (30) , 2013, с.83-94.
11 Данильченко Т.Н., Масевич К.К. Многошаговая игра двух лиц при «осторожном» втором игроке и последовательной передаче информации. Журнал вычислительной математики и математической физики, № 5, Т. 19, 1974, с.1323-1327.
12 Крутов Б.П. Динамические квазиинформационные расширения игр с расширяемой коалиционной структуро. – М.: ВЦ РАН, 1986, 54 с.
13 Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1973.