П. Г. Сурков

АСИМПТОТИКИ РЕГУЛЯРИЗИРОВАННЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ*

1. Введение

Многие математические модели, описывающие динамику численности популяций, обнаруживают свою применимость к различным процессам в экономике, инженерии, биологическим и биохимическим реакциям [1]. Особым интересом у исследователей пользуется изучение динамики двух взаимодействующих сообществ по принципу хищник–жертва. В качестве сообществ могут выступать работники и заработная плата (инвестиции и сбережения), подобные модели описаны в работе [2]. К настоящему времени известно много математических моделей для системы хищник–жертва, описание основных из них приведено в работах [3, 4]. Одной из таких систем в экономике является модель Гудвина [5], которую иногда называют моделью классовой борьбы. Гудвин принял модель популяционной динамики Лотки–Вольтерры в качестве устойчивой модели экономического роста. В этой модели конъюнктурные циклы возникают вследствие перераспределения национального дохода между трудом и капиталом.

Далее будем рассматривать модель Лотки–Вольтерры с запаздыванием, подробное описание которой можно найти в [6]

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(t)(r_1 - a_{11}x(t) - a_{12}y(t-\tau_1)), \\ \frac{dy}{dt} &= y(t)(-r_2 + a_{21}x(t-\tau_2) - a_{22}y(t)), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — плотности популяций, r_1 — мальтузианский коэффициент линейного роста жертвы в отсутствии хищника, r_2 — коэффициент смертности хищника в отсутствии пищи, a_{11} — параметр саморегуляции популяции жертвы, a_{12} — параметр давления хищника на жертву, и a_{22} — параметр, описывающий внутривидовые отношения у хищника такие, как каннибализм.

Система (1) описывает математическую модель двухвидового биоценоза, когда среда обитания однородна, миграционные процессы не оказывают

*Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума УрО РАН “Перспективы скоординированного социально-экономического развития России и Украины в общеевропейском контексте”(12-1-1038П) и Урало-Сибирского междисциплинарного проекта (12-С-1-1017).

существенного влияния на изменение численности популяции и количество растительной пищи регулярно восстанавливается.

Мониторинг численности популяции, например [7], требует существенных материальных затрат, и зачастую возникают сложности в его осуществлении. Математическое моделирование может облегчить решение проблемы изучения динамики изменения численности популяции, а так же помочь понять суть некоторых экологических процессов, например экологической ловушки [8].

Мотивация большинства работ связана с прогнозом будущего изменения численности популяций. Успешному решению этой проблемы помогает корректность начальной задачи Коши для системы (1).

Основной качественный результат состоит в том, что в математической модели (1) численность популяций при возрастании времени стремится к постоянной или снижается до нуля, т.е. сложно обнаружить предельный цикл. В случае когда популяции находятся на стадии переходного процесса и на некоторых временных участках численность популяций неизвестна, то представляет интерес обратная задача определения численности популяций в предыдущие промежутки времени. Данная задача является математически более сложной ввиду своей некорректности [9].

В настоящей работе решается некорректная задача восстановления численности популяций в математической модели хищник–жертва с запаздыванием. В работе [10] данная методика была применена для нахождения регуляризованных решений уравнения Хатчинсона на отрицательной полуоси.

2. Постановка задачи

Рассматривается популяционная модель, описываемая системой дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned} \frac{dN_1(t)}{dt} &= r_1\left(1 - \frac{1}{k_2}N_2(t-h)\right)N_1(t), \\ \frac{dN_2(t)}{dt} &= r_2\left(1 - \frac{1}{k_1}N_1(t-h)\right)N_2(t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \end{aligned} \tag{2}$$

где $N_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ — численность популяции травоядных животных, $N_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ — численность популяции хищников и h — положительный параметр.

Информация о численности популяций на промежутке времени $[t_0 - h, t_0]$ предполагается известной. Без ограничения общности, полагаем $t_0 = 0$. Численность популяций на отрезке $[-h, 0]$ определяется положительными функциями φ_1 и φ_2. Заданную пару начальных функций $(\varphi_1, \varphi_2)^\top$ будем обозначать одним символом φ, тогда она принадлежит сепарабельному гильбертову пространству $H = L_2([-h,0),\mathbb{R}^2)\times\mathbb{R}^2$ со скалярным произведением

$$(\varphi,\psi) = \psi(0)\varphi(0) + \int\limits_{-h}^{0} \psi(s)\varphi(s)ds.$$

Восстановление численности популяции проводится методом шагов в сторону убывания времени. Тогда для нахождения функций

$$x_m = (x_m^1, x_m^2)^\top, \quad x_m^1(\theta) = N_1(mh+\theta),$$
$$x_m^2(\theta) = N_2(mh+\theta), \quad \theta\in[-h,0], \quad m\leqslant -1,$$

имеем систему уравнений

$$U(x_m) = x_{m+1}, \quad m\leqslant -1, \quad x_0 = \varphi, \tag{3}$$

где $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2)^\top$ и оператор $U\colon H\to H$ определяется формулами

$$U(x)(\theta) = \begin{pmatrix} \exp\left(r_1(h+\theta) - \dfrac{r_1}{k_2}\displaystyle\int_{-h}^{\theta} x_2(s)\,ds\right)x_1(0) \\ \exp\left(-r_2(h+\theta) + \dfrac{r_2}{k_1}\displaystyle\int_{-h}^{\theta} x_1(s)\,ds\right)x_2(0) \end{pmatrix}, \quad \theta\in[-h,0].$$

Таким образом, восстановление численности популяции связано с решением операторного уравнения

$$U(x) = \varphi.$$

3. Система уравнений для нахождения значений регуляризирующего оператора

Поставленная задача является некорректной задачей, и для её решения используется метод регуляризации А.Н. Тихонова [9]. Выбираем стабилизирующий функционал следующего вида

$$\Omega[x] = x^\top(0)Gx(0) + \int\limits_{-h}^{0}(x^\top(s)Qx(s) + x'^\top(s)Px'(s))ds,$$

где G, P, Q — положительно определённые матрица размера 2×2, G и Q — симметричные, а P — диагональная, x' — поэлементная производная функции $x = (x_1,x_2)^\top$, и $x\in W_2^1([-h,0],\mathbb{R}^2)$. Для фиксированного положительного значения параметра регуляризации α требуется найти элемент x_α, минимизирующий сглаживающий функционал

$$M^\alpha[\varphi,x] = (U(x)-\varphi, U(x)-\varphi) + \alpha\Omega[x], \quad x\in W_2^1([-h,0],\mathbb{R}^2).$$

Для нахождения необходимого условия минимума функционала [11], дифференцируем сглаживающий функционал по Гато и приравниваем к нулю найденную производную. Тогда получаем уравнение

$$(U_x'^*(x)U(x) - U_x'^*(x)\varphi, y) + \alpha\left(y(0)Gx(0) + \int\limits_{-h}^{0}(y(s)Qx(s) + y'(s)Px'(s))\,ds\right) = 0.$$

Производная Гато оператора U в точке x определяется формулой

$$(U_x'(x)y)(\theta) = \begin{pmatrix} \exp\left(r_1(h+\theta) - \frac{r_1}{k_2}\int_{-h}^{\theta} x_2(s)\,ds\right)\left(y_1(0) - \frac{r_1}{k_2}x_1(0)\int_{-h}^{\theta} y_2(s)\,ds\right) \\ \exp\left(-r_2(h+\theta) - \frac{r_2}{k_1}\int_{-h}^{\theta} x_1(s)\,ds\right)\left(y_2(0) + \frac{r_2}{k_1}x_2(0)\int_{-h}^{\theta} y_1(s)\,ds\right) \end{pmatrix},$$

$\theta \in [-h, 0]$. Сопряжённый оператор $U_x'^*(x)$ определяется формулами

$$(U_x'^*(x)y)(0) = \begin{pmatrix} \exp(r_1(2h\tilde{x}_2(-h)))\left(y_1(0) + \int_{-h}^{0}\exp(r_1\tilde{x}_2(s))y_1(s)\,ds\right) \\ \exp(r_2\tilde{x}_1(-h))\left(y_2(0) + \int_{-h}^{0}\exp(-r_2\tilde{x}_1(s))y_2(s)\,ds\right) \end{pmatrix},$$

$$(U_x'^*(x)y)(\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{r_1}{k_2}x_1(0)\exp(r_1(2h+\tilde{x}_2(-h)))\left(y_1(0) + \int_{\theta}^{0}\exp(r_1\tilde{x}_2(s))y_1(s)\,ds\right) \\ \frac{r_2}{k_1}x_2(0)\exp(r_2\tilde{x}_1(-h))\left(y_2(0) + \int_{\theta}^{0}\exp(-r_2\tilde{x}_1(s))y_2(s)\,ds\right) \end{pmatrix},$$

$\theta \in [-h, 0)$, где

$$\tilde{x}_1(\theta) = \theta + \frac{1}{k_1}\int\limits_{\theta}^{0} x_1(s)\,ds, \quad \tilde{x}_2(\theta) = \theta + \frac{1}{k_2}\int\limits_{\theta}^{0} x_2(s)\,ds, \quad \theta \in [-r, 0].$$

Пользуясь определением скалярного произведения в пространстве H и применяя формулу интегрирования по частям, преобразуем необходимое условие минимума сглаживающего функционала. Тогда возможный минимизирующий элемент x_α удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} &(U_x'^*(x)U(x))(\theta) + \alpha(Qx(\theta) - Px''(\theta)) = (U_x'^*(x)\varphi)(\theta), \quad \theta \in [-h, 0), \\ &(U_x'^*(x)U(x))(0) + \alpha(Gx(0) + Px'(0)) = (U_x'^*(x)\varphi)(0), \quad x'(-h) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Введём вспомогательные вектор-функции ψ и χ с помощью формул

$$\begin{aligned}
&\psi(\theta) = (U_x'^*(x)(\chi - \varphi))(\theta), \quad \theta \in [-h, 0), \quad \psi(0) = \psi(-0),\\
&\chi(\theta) = (Ux)(\theta), \qquad\qquad\qquad\quad \theta \in [-h, 0].
\end{aligned}$$

Тогда, используя представления операторов U и $U_x'^*(x)$, систему уравнений для минимизирующего элемента можно заменить эквивалентной краевой задачей для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Утверждение 1. Возможный минимизирующий элемент x_α является компонентой решения следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&x'' = P^{-1}Qx + \alpha^{-1}P^{-1}\psi,\\
&\psi_1' = (r_1/k_2)\,\chi_1(\chi_1 - \varphi_1(\theta)),\\
&\psi_2' = (r_2/k_1)\,\chi_2(\chi_2 - \varphi_2(\theta)),\\
&\chi_1' = r_1(1 - (1/k_2)\,x_2)\chi_1,\\
&\chi_2' = r_2(1 - (1/k_1)\,x_1)\chi_2,
\end{aligned} \tag{5}$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned}
&\psi_1(-h) - \alpha(r_1/k_2)\,x_1(0)(g_{11}x_1(0) + g_{12}x_2(0) + p_1x_1'(0)) = 0,\\
&\psi_2(-h) - \alpha(r_2/k_1)\,x_2(0)(g_{12}x_1(0) + g_{12}x_2(0) + p_2x_2'(0)) = 0,\\
&\psi'(0) + \psi(0) = 0, \qquad x(0) = \chi(-h), \qquad x'(-h) = 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

где $\varphi \in H$, $x = (x_1, x_2)^\top$, $\psi = (\psi_1, \psi_2)^\top$, $\chi = (\chi_1, \chi_2)^\top$, $G = \{g_{ij}\}_1^2$, $P = \mathrm{diag}(p_1, p_2)$, компонента χ_α решения краевой задачи (5), (6) удовлетворяет условию $\chi^\alpha = U(x_\alpha)$, α — малый положительный параметр.

Доказательство. Продолжим первое уравнение системы (4) на весь отрезок $[-h, 0]$ и используем для его записи вспомогательную функцию ψ, получим

$$\psi(\theta) + \alpha(Qx(\theta) - Px''(\theta)) = 0, \quad \theta \in [-r, 0].$$

Из определения вектор-функции χ следует, что её компоненты удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\chi_1' = r_1(1 - (1/k_2)\,x_2)\chi_1, \quad \chi_2' = r_2(1 - (1/k_1)\,x_1)\chi_2,$$

с краевым условием $x(0) = \chi(-h)$.

Используя определение вектор-функции ψ, получаем, что её компоненты удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\psi_1' = (r_1/k_2)\,\chi_1(\chi_1 - \varphi_1(\theta)), \quad \psi_2' = (r_2/k_1)\,\chi_2(\chi_2 - \varphi_2(\theta)),$$

с краевым условием

$$\psi_1(0) = \psi_1(-0) = -(r_1/k_2)\,\chi_1(0)(\chi_1(0) - \varphi_1(0)) = -\psi_1'(0),$$
$$\psi_2(0) = \psi_2(-0) = (r_2/k_1)\,\chi_2(0)(\chi_2(0) - \varphi_2(0)) = -\psi_2'(0).$$

Перепишем второе уравнение системы (4), используя вспомогательные вектор-функции, имеем

$$\begin{aligned}
&\exp(r_1(2h + \tilde{x}_2(-h)))\left(\chi_1(0) - \varphi_1(0) + \int_{-h}^{0} \exp(r_1\tilde{x}_2(s))(\chi_1(s) - \varphi_1(s))\,ds\right)\\
&\qquad + \alpha(g_{11}x_1(0) + g_{12}x_2(0) + p_1x_1'(0)) = 0,\\
&\exp(r_2\tilde{x}_1(-h))\left(\chi_2(0) - \varphi_2(0) + \int_{-h}^{0} \exp(-r_2\tilde{x}_1(s))(\chi_2(s) - \varphi_2(s))\,ds\right)\\
&\qquad + \alpha(g_{12}x_1(0) + g_{22}x_2(0) + p_2x_2'(0)) = 0.
\end{aligned}$$

Учитывая значение вспомогательной вектор-функции $\psi(-h)$, последняя система преобразуется к виду

$$\psi_1(-h) - \alpha(r_1/k_2)\,x_1(0)(g_{11}x_1(0) + g_{12}x_2(0) + p_1x_1'(0)) = 0,$$
$$\psi_2(-h) + \alpha(r_2/k_1)\,x_2(0)(g_{12}x_1(0) + g_{22}x_2(0) + p_2x_2'(0)) = 0. \qquad \square$$

Преобразование краевой задачи (5), (6) производим по методике аналогичной предложенной в работе [10]. Исключим из системы уравнений (5) и краевых условий (6) вспомогательные переменные ψ и χ, для этого накладываются дополнительные условия на начальные функции φ_1 и φ_2: $\varphi \in W_2^1([-h,0]\mathbb{R}^2)$. Из последних двух равенств системы (5) находим

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= (1/2)\left(\varphi_1(\theta) + \sqrt{\varphi_1^2(\theta) + 4(k_2/r_1)\,\psi_1'}\right),\\
\chi_2 &= (1/2)\left(\varphi_2(\theta) + \sqrt{\varphi_2^2(\theta) - 4(k_1/r_2)\,\psi_2'}\right).
\end{aligned} \tag{7}$$

Вычисляя производные от полученных выражений и подставляя их в третье и четвёртое уравнения системы (5), получаем

$$\begin{aligned}
&\varphi_1'(\theta) + (\varphi_1^2(\theta) + 4(k_2/r_1)\,\psi_1')^{-1/2}(\varphi_1(\theta)\varphi_1'(\theta) + 2(k_2/r_1)\,\psi_1'')\\
&\qquad = (\varphi_1(\theta) + (\varphi_1^2(\theta) + 4(k_2/r_1)\,\psi_1')^{1/2})(r_1 - (r_1/k_2)\,x_2),\\
&\varphi_2'(\theta) + (\varphi_2^2(\theta) - 4(k_1/r_2)\,\psi_2')^{-1/2}(\varphi_2(\theta)\varphi_2'(\theta) + 2(k_1/r_2)\,\psi_2'')\\
&\qquad = (\varphi_2(\theta) + (\varphi_2^2(\theta) - 4(k_1/r_2)\,\psi_2')^{1/2})(r_2 - (r_2/k_1)\,x_1),
\end{aligned} \tag{8}$$

Дважды дифференцируя первое уравнение системы (5), находим

$$\psi' = \alpha P x''' - \alpha Q x', \quad \psi'' = \alpha P x^{\mathrm{IV}} - \alpha Q x''.$$

Исключим ψ из уравнения (8) и введём новые переменные с помощью формул $y = x$, $u = \alpha^{1/4}x'$, $v = \alpha^{1/2}x''$, $w = \alpha^{3/4}x'''$. Тогда получаем систему дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&\alpha^{1/4}y' = u, \quad \alpha^{1/4}u' = v, \quad \alpha^{1/4}v' = w,\\
&\alpha^{1/4}w_1' = (r_1/2k_2p_1)\,((\varphi_1^2(\theta) + 4(k_2/r_1)\,(\alpha^{1/4}p_1w_1 - \alpha^{3/4}q_{11}u_1 - \alpha^{3/4}q_{12}u_2))^{1/2}\\
&\qquad - \varphi_1(\theta))(\varphi_1(\theta)(r_1 - (r_1/k_2)\,y_2) - \varphi_1'(\theta)) + (\alpha^{1/2}/p_1)\,(q_{11}v_1 + q_{12}v_2)\\
&\qquad + 2p_1^{-1}(\alpha^{1/4}p_1w_1 - \alpha^{3/4}q_{11}u_1 - \alpha^{3/4}q_{12}u_2)(r_1 - (r_1/k_2)\,y_2),\\
&\alpha^{1/4}{w_2}' = (r_2/2k_1p_2)\,((\varphi_2^2(\theta) + 4(k_1/r_2)\,(\alpha^{1/4}p_2w_2 - \alpha^{3/4}q_{12}u_1 - \alpha^{3/4}q_{22}u_2))^{1/2}\\
&\qquad - \varphi_2(\theta))(\varphi_2(\theta)(r_2 - (r_2/k_1)\,y_1) - \varphi_2'(\theta)) + (\alpha^{1/2}/p_2)\,(q_{12}v_1 + q_{22}v_2)\\
&\qquad + 2p_2^{-1}(\alpha^{1/4}p_2w_2 - \alpha^{3/4}q_{12}u_1 - \alpha^{3/4}q_{22}u_2)(r_2 - (r_2/k_1)\,y_1).
\end{aligned} \tag{9}
$$

Применяя введённые выше переменные в краевых условиях (6), имеем

$$
\begin{aligned}
u(-h) = 0, \quad & p_1v_1(-h) - \alpha^{1/2}(r_1/k_2)\,y_1(0)(g_{11}y_1(0) + g_{12}y_2(0))\\
&\qquad - \alpha^{1/4}(r_1/k_2)\,p_1y_1(0)u_1(0) = 0,\\
& p_2v_2(-h) + \alpha^{1/2}(r_2/k_1)\,y_1(0)(g_{12}y_1(0) + g_{22}y_2(0))\\
&\qquad + \alpha^{1/4}(r_2/k_1)\,p_2y_2(0)u_2(0) = 0,\\
& Pw(0) - \alpha^{1/2}Gu(0) + \alpha^{1/4}Pv(0) - \alpha^{3/4}Qy(0) = 0,\\
& \varphi_1(-h) - 2y_1(0) + (\varphi_1^2(-h) + 4(k_2/r_1)\,(\alpha^{1/4}p_1w_1(-h)\\
&\qquad - \alpha^{3/4}(q_{11}u_1(-h) + q_{12}u_2(-h))))^{1/2} = 0,\\
& \varphi_2(-h) - 2y_2(0) + (\varphi_2^2(-h) - 4(k_1/r_2)\,(\alpha^{1/4}p_2w_2(-h)\\
&\qquad - \alpha^{3/4}(q_{12}u_1(-h) + q_{22}u_2(-h))))^{1/2} = 0,
\end{aligned} \tag{10}
$$

Вводя вектор $Y = (y_1, y_2, u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2)^\top$, систему (9) запишем в векторной форме

$$
\frac{dY}{d\vartheta} = \alpha^{-1/4}\mathcal{A}(\vartheta)Y + \alpha^{-1/4}\widetilde{\Phi}_1(\vartheta) + \widetilde{\Phi}_2(\vartheta, \alpha, Y), \tag{11}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(\vartheta) &= \left\| \delta_{j8}\frac{r_2^2\varphi_2^2(\vartheta)}{k_1^2p_2}, -\delta_{j7}\frac{r_1^2\varphi_1^2(\vartheta)}{k_2^2p_1}, \delta_{j1}, \delta_{j2}, \delta_{j3}, \delta_{j4}, \delta_{j5}, \delta_{j6} \right\|_1^8,\\
\widetilde{\Phi}_1(\vartheta) &= \|\widetilde{\Phi}_1^j(\vartheta)\|_1^8, \quad \widetilde{\Phi}_1^j(\vartheta) = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant 6,\\
\widetilde{\Phi}_1^7(\vartheta) &= \frac{r_1}{k_2p_1}\varphi_1(\vartheta)(r_1\varphi_1(\vartheta) - \varphi_1'(\vartheta)),\\
\widetilde{\Phi}_1^8(\vartheta) &= \frac{r_2}{k_1p_2}\varphi_2(\vartheta)(r_2\varphi_2(\vartheta) - \varphi_2'(\vartheta)),\\
\widetilde{\Phi}_2(\vartheta, \alpha, Y) &= \|\widetilde{\Phi}_2^j(\vartheta, \alpha, Y)\|_1^8, \quad \widetilde{\Phi}_2^j(\vartheta, \alpha, Y) = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant 6,\\
\widetilde{\Phi}_2^7(\vartheta, \alpha, Y) &= \frac{2(\varphi_1(\vartheta)(r_1 - (r_1/k_2)\,y_2) - \varphi_1'(\vartheta))(p_1w_1 - \alpha^{1/2}(q_{11}u_1 + q_{12}u_2))}{(\varphi_1^2(\vartheta) + (4k_2/r_1)\,(\alpha^{1/4}p_1w_1 - \alpha^{3/4}(q_{11}u_1 + q_{12}u_2)))^{1/2} + \varphi_1(\vartheta)}
\end{aligned}
$$

$$+\,\alpha^{1/4}(1/p_1)\,(q_{11}v_1+q_{12}v_2)+(2/p_1)\,(p_1w_1-\alpha^{1/2}(q_{11}u_1+q_{12}u_2))(r_1-(r_1/k_2)\,y_2),$$

$$\widetilde{\Phi}_2^8(\vartheta,\alpha,Y)=\frac{2(\varphi_2(\vartheta)(r_2-(r_2/k_1)\,y_1)-\varphi_2'(\vartheta))(p_2w_2-\alpha^{1/2}(q_{12}u_1+q_{22}u_2))}{(\varphi_2^2(\vartheta)-(4k_1/r_2)\,(\alpha^{1/4}p_2w_2-\alpha^{3/4}(q_{12}u_1+q_{22}u_2)))^{1/2}+\varphi_2(\vartheta)}$$

$$+\,\alpha^{1/4}(1/p_2)\,(q_{12}v_1+q_{22}v_2)+(2/p_2)\,(p_2w_2-\alpha^{1/2}(q_{12}u_1+q_{22}u_2))(r_2-(r_2/k_1)\,y_1),$$

δ_{ij} — символы Кронекера.

Найдём асимптотическое решение системы (11), используя метод, описанный в работе [12]. Не сложно установить справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. Собственные числа матрицы $\mathcal{A}(\theta)$ определяются формулами

$$\lambda_j(\theta)=\omega(\theta)e_j,\quad \theta\in[-h,0],\quad j=1,\ldots,8, \tag{12}$$

где $e_1=\cos(\pi/8)+i\sin(\pi/8)$, $e_2=\sin(\pi/8)-i\cos(\pi/8)$, $e_3=\bar{e}_1$, $e_4=\bar{e}_2$, $e_5=-e_1$, $e_6=-e_2$, $e_7=-e_3$, $e_8=-e_4$,

$$\omega(\theta)=\left(\frac{r_1r_2\varphi_1(\theta)\varphi_2(\theta)}{k_1k_2\sqrt{p_1p_2}}\right)^{1/4},\quad \theta\in[-h,0].$$

Сделаем замену переменных

$$Y=T(\theta)z, \tag{13}$$

где $T(\theta)=\{t_{ij}\}_1^8$ — матрица, приводящая матрицу $\mathcal{A}(\theta)$ к жордановой форме и определяемая формулами

$$\begin{array}{llll} t_{1j}=1, & t_{2j}=\sigma(\theta)e_j^4, & t_{3j}=\lambda_j(\theta), & t_{4j}=\lambda_j(\theta)\sigma(\theta)e_j^4,\\ t_{5j}=\lambda_j^2(\theta), & t_{6j}=\lambda_j^2(\theta)\sigma(\theta)e_j^4, & t_{7j}=\lambda_j^3(\theta), & t_{8j}=\lambda_j^3(\theta)\sigma(\theta)e_j^4, \end{array}$$

здесь $j=1,\ldots,8$,

$$\sigma(\theta)=-\frac{k_2r_2\sqrt{p_1}\varphi_2(\theta)}{k_1r_1\sqrt{p_2}\varphi_1(\theta)},\quad \theta\in[-h,0]. \tag{14}$$

Тогда получим систему

$$\frac{dz}{d\theta}=\alpha^{-1/4}J(\theta)z+\alpha^{-1/4}\Phi_1(\theta)+\Phi_2(\theta,\alpha,z), \tag{15}$$

где $J(\theta)=\operatorname{diag}(\lambda_1(\theta),\lambda_2(\theta),\ldots,\lambda_8(\theta))$, $\Phi_1(\theta)=T^{-1}(\theta)\widetilde{\Phi}_1(\theta)$, $\Phi_2(\theta,\alpha,z)=$ $=T^{-1}(\theta)(\widetilde{\Phi}_2(\theta,\alpha,T(\theta)z)-T'(\theta)z)$, $\theta\in[-h,0]$.

Теорема 1. Пусть $\varphi_1,\varphi_2\in W_\infty^2[-h,0]$. Тогда компоненты решения системы (15) определяются асимптотическими формулами

$$
\begin{aligned}
z_j(\theta,\alpha,D) = \exp\left(\alpha^{-1/4} e_j \int_{\theta_j}^{\theta} \omega(\tau)\,d\tau\right) D_j - e_j^{-1}\omega^{-1}(\theta)\Phi_1^j(\theta) \\
+ O(\alpha^{1/4};\theta, D_1,\dots,D_8), \quad j = 1,\dots,8, \quad \theta\in[-h,0],
\end{aligned}
\tag{16}
$$

где $D = \|D_s\|_1^8$, D_s, $s = 1,\dots,8$ — произвольные постоянные векторы из $\mathbb{C}^n$, а начальные точки интегрирования выбираются согласно равенствам

$$
\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 0, \quad \theta_5 = \theta_6 = \theta_7 = \theta_8 = -h.
$$

Доказательство полностью повторяет доказательство Теоремы 1 работы [10].

Теорема 2. Пусть выполнены условия Теоремы 1. Тогда компоненты решения краевой задачи (9), (10) определяются асимптотическими формулами

$$
\begin{aligned}
y_1(\theta,\alpha) &= S_1(\alpha,\theta,\varphi) - \frac{k_1}{r_2}\left(r_2 - \frac{\varphi_2'(\theta)}{\varphi_2(\theta)}\right) + O(\alpha^{1/4};\vartheta, D_1,\dots,D_8),\\
y_2(\theta,\alpha) &= S_2(\alpha,\theta,\varphi) + \frac{k_2}{r_1}\left(r_1 - \frac{\varphi_1'(\theta)}{\varphi_1(\theta)}\right) + O(\alpha^{1/4};\vartheta, D_1,\dots,D_8),
\end{aligned}
\tag{17}
$$

где

$$
\begin{aligned}
S_1(\alpha,\theta,\varphi) &= (1/2)\,\exp(\alpha^{-1/4}\cos(\pi/8)\bar\omega(\theta))(\cos(\alpha^{-1/4}\sin(\pi/8)\bar\omega(\theta))\\
&\quad\times(\Delta_1(\varphi)-\Delta_2(\varphi)) + \sin(\alpha^{-1/4}\sin(\pi/8)\bar\omega(\theta))(\Delta_1(\varphi)+\Delta_2(\varphi)))\\
&\quad+(1/2)\,\exp(\alpha^{-1/4}\sin(\pi/8)\bar\omega(\theta))(\cos(\alpha^{-1/4}\cos(\pi/8)\bar\omega(\theta))\\
&\quad\times(\Delta_1(\varphi)+\Delta_2(\varphi)) + \sin(\alpha^{-1/4}\cos(\pi/8)\bar\omega(\theta))(\Delta_1(\varphi)-\Delta_2(\varphi))),\\
S_2(\alpha,\theta,\varphi) &= (1/2)\,(\exp(\alpha^{-1/4}\cos(\pi/8)\bar\omega(\theta))(\cos(\alpha^{-1/4}\sin(\pi/8)\bar\omega(\theta))\\
&\quad\times(\Delta_1(\varphi)+\Delta_2(\varphi))\sigma(\theta) - \sin(\alpha^{-1/4}\sin(\pi/8)\bar\omega(\theta))(\Delta_1(\varphi)\\
&\quad-\Delta_2(\varphi))) + \exp(\alpha^{-1/4}\sin(\pi/8)\bar\omega(\theta))(\cos(\alpha^{-1/4}\cos(\pi/8)\bar\omega(\theta))\\
&\quad\times(\Delta_1(\varphi)-\Delta_2(\varphi)) - \sin(\alpha^{-1/4}\cos(\pi/8)\bar\omega(\theta))(\Delta_1(\varphi)+\Delta_2(\varphi)))),
\end{aligned}
\tag{18}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Delta(\varphi) = (\Delta_1(\varphi),\Delta_2(\varphi))^\top, \quad \Delta_1(\varphi) = \varphi_1(-h) + \frac{k_1}{r_2}\left(r_2 - \frac{\varphi_2'(0)}{\varphi_2(0)}\right),\\
&\Delta_2(\varphi) = \sigma^{-1}(0)\left(\varphi_2(-h) - \frac{k_2}{r_1}\left(r_1 - \frac{\varphi_1'(0)}{\varphi_1(0)}\right)\right), \quad \bar\omega(\theta) = \int_0^\theta \omega(\tau)\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Доказательство. Используя асимптотические представления компонент решения (16) системы (15) и замену (13), находим компоненты решения системы (9)

$$\begin{aligned} y_1(\theta,\alpha) &= \sum_{j=1}^{8} t_{1j}\exp\left(\alpha^{-1/4}e_j\int_{\theta_j}^{\theta}\omega(\tau)\,d\tau\right)D_j \\ &\quad - (k_1/r_2)\,(r_2 - (\varphi_2'(\theta)/\varphi_2(\theta))) + O(\alpha^{1/4};\vartheta, D_1,\dots,D_8), \\ y_2(\theta,\alpha) &= \sum_{j=1}^{8} t_{2j}\exp\left(\alpha^{-1/4}e_j\int_{\theta_j}^{\theta}\omega(\tau)\,d\tau\right)D_j \\ &\quad + (k_2/r_1)/,(r_1 - (\varphi_1'(\theta)/\varphi_1(\theta))) + O(\alpha^{1/4};\vartheta, D_1,\dots,D_8), \\ Y_l(\theta,\alpha) &= \sum_{j=1}^{8} t_{lj}\exp\left(\alpha^{-1/4}e_j\int_{\theta_j}^{\theta}\omega(\tau)\,d\tau\right)D_j \\ &\quad + O(\alpha^{1/4};\theta, D_1,\dots,D_8), \quad l=3,\dots,8. \end{aligned} \tag{19}$$

Подставляя найденные асимптотические представления в краевые условия (10), получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} e_5D_5 + e_6D_6 + e_7D_7 + e_8D_8 + O(\alpha^{1/4}; D_1,\dots,D_8) &= 0, \\ e_5^5D_5 + e_6^5D_6 + e_7^5D_7 + e_8^5D_8 + O(\alpha^{1/4}; D_1,\dots,D_8) &= 0, \\ e_5^2D_5 + e_6^2D_6 + e_7^2D_7 + e_8^2D_8 + O(\alpha^{1/4}; D_1,\dots,D_8) &= 0, \\ e_5^6D_5 + e_6^6D_6 + e_7^6D_7 + e_8^6D_8 + O(\alpha^{1/4}; D_1,\dots,D_8) &= 0, \\ e_1^3D_1 + e_2^3D_2 + e_3^3D_3 + e_4^3D_4 + O(\alpha^{1/4}; D_1,\dots,D_8) &= 0, \\ e_1^7D_1 + e_2^7D_2 + e_3^7D_3 + e_4^7D_4 + O(\alpha^{1/4}; D_1,\dots,D_8) &= 0, \\ D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + O(\alpha^{1/4}; D_1,\dots,D_8) &= \Delta_1(\varphi), \\ e_1^4D_1 + e_2^4D_2 + e_3^4D_3 + e_4^4D_4 + O(\alpha^{1/4}; D_1,\dots,D_8) &= \Delta_2(\varphi), \end{aligned} \tag{20}$$

Последняя система при $\alpha = 0$ имеет единственное решение, тогда, учитывая асимптотику уравнений системы (20), находим

$$\begin{aligned} D_1 &= (1/4)\,(1-i)\Delta_1(\varphi) + (1/4)\,(-1-i)\Delta_2(\varphi) + O(\alpha^{1/4}), \\ D_2 &= (1/4)\,(1+i)\Delta_1(\varphi) + (1/4)\,(1-i)\Delta_2(\varphi) + O(\alpha^{1/4}), \\ D_3 &= (1/4)\,(1+i)\Delta_1(\varphi) + (1/4)\,(-1+i)\Delta_2(\varphi) + O(\alpha^{1/4}), \\ D_4 &= (1/4)\,(1-i)\Delta_1(\varphi) + (1/4)\,(1+i)\Delta_2(\varphi) + O(\alpha^{1/4}), \\ D_5 &= O(\alpha^{1/4}), \quad D_6 = O(\alpha^{1/4}), \quad D_7 = O(\alpha^{1/4}), \quad D_8 = O(\alpha^{1/4}). \end{aligned} \tag{21}$$

Подставляя найденные значения постоянных в (19), получаем (17). □

4. Зависимость параметра регуляризации от допустимой погрешности

Поскольку $U(x_\alpha) = \chi^\alpha$, то уравнение невязки $(U(x) - \varphi, U(x) - \varphi) = \delta^2$, имеет вид

$$\delta^2 = (\chi_1^\alpha(0,\varphi) - \varphi_1(0))^2 + (\chi_2^\alpha(0,\varphi) - \varphi_2(0))^2$$
$$+ \int_{-h}^0 (\chi_1^\alpha(s,\varphi) - \varphi_1(s))^2 ds + \int_{-h}^0 (\chi_2^\alpha(s,\varphi) - \varphi_2(s))^2 ds.$$

Используя в (7) переменные u и w, получаем

$$(\chi_1^\alpha(\theta,\varphi) - \varphi_1(\theta))^2 = \frac{k_2^2 p_1^2 w_1^2(\theta,\alpha,\varphi)}{r_1^2 \varphi_1^2(\theta)} \alpha^{1/2} - \frac{4k_2^3 p_1^3 w_1^3(\theta,\alpha,\varphi)}{r_1^3 \varphi_1^4(\vartheta)} \alpha^{3/4} + O(\alpha;\theta,\varphi),$$
$$(\chi_2^\alpha(\theta,\varphi) - \varphi_2(\theta))^2 = \frac{k_1^2 p_2^2 w_2^2(\theta,\alpha,\varphi)}{r_2^2 \varphi_2^2(\theta)} \alpha^{1/2} - \frac{4k_1^3 p_2^3 w_2^3(\theta,\alpha,\varphi)}{r_2^3 \varphi_2^4(\vartheta)} \alpha^{3/4} + O(\alpha;\theta,\varphi).$$

Учитывая формулы (19), вычисляем

$$w_1(0) = O(\alpha^{1/4};\varphi), \qquad w_2(0) = O(\alpha^{1/4};\varphi),$$
$$(\chi_1^\alpha(0,\varphi) - \varphi_1(0))^2 = O(\alpha;\varphi), \quad (\chi_2^\alpha(0,\varphi) - \varphi_2(0))^2 = O(\alpha;\varphi),$$

и находим

$$\int_{-h}^0 (\chi_1^\alpha(s,\varphi) - \varphi_1(s))^2 ds = \alpha^{3/4} \frac{k_2^2 p_1^2 \omega^5(0)}{r_1^2 \varphi_1^2(0)} \sum_{k,j=1}^2 \frac{e_j^3 e_k^3}{e_j + e_k} D_j D_k + O(\alpha;\varphi),$$
$$\int_{-h}^0 (\chi_2^\alpha(s,\varphi) - \varphi_2(s))^2 ds = \alpha^{3/4} \frac{k_1^2 p_2^2 \omega^5(0) \sigma^2(0)}{r_2^2 \varphi_2^2(0)} \sum_{k,j=1}^2 \frac{\bar{e}_j \bar{e}_k}{e_j + e_k} D_j D_k + O(\alpha;\varphi).$$

В результате имеем формулу

$$\delta^2 = \alpha^{3/4} \gamma(\varphi) + O(\alpha;\varphi),$$

где

$$\begin{aligned}\gamma(\varphi) = &(\sqrt{2}/4)\,\sin(\pi/8)(\Delta_1^2(\varphi) + 5\Delta_2^2(\varphi)) \\ &+ (\sqrt{2}/4)\,\cos(\pi/8)(\Delta_1^2(\varphi) - 4\Delta_1(\varphi)\Delta_2(\varphi) + \Delta_2^2(\varphi)) \\ &+ (1/8)\,\sin(\pi/8)(-3\Delta_1^2(\varphi) + 2\Delta_1(\varphi)\Delta_2(\varphi) - \Delta_2^2(\varphi)) \\ &+ (1/8)\,\cos(\pi/8)(-\Delta_1^2(\varphi) + 2\Delta_1(\varphi)\Delta_2(\varphi) - 3\Delta_2^2(\varphi)).\end{aligned} \tag{22}$$

При $\Delta_1(\varphi) \neq 0$ или $\Delta_2(\varphi) \neq 0$ полученное уравнение имеет единственное непрерывное решение при малых положительных δ, определяемое формулой

$$\alpha(\delta,\varphi) = \gamma^{-4/3}(\varphi)\delta^{8/3} + O(\delta^{10/3},\varphi). \tag{23}$$

Используя полученное асимптотическое разложение не сложно доказать следующее утверждение.

Теорема 3. Значение регуляризирующего оператора для уравнения $U(x) = \varphi$ на множестве $D = \{\varphi\colon \Delta(\varphi) \neq 0, \varphi \in W^2_\infty([-h,0],\mathbb{R}^2)\}$ определяется асимптотическими формулами

$$R(\theta,\delta) = \begin{pmatrix} \mathbb{S}_1(\delta,\theta,\varphi) - \dfrac{k_1}{r_2}\left(r_2 - \dfrac{\varphi_2'(\theta)}{\varphi_2(\theta)}\right) \\ \mathbb{S}_2(\delta,\theta,\varphi) + \dfrac{k_2}{r_1}\left(r_1 - \dfrac{\varphi_1'(\theta)}{\varphi_1(\theta)}\right) \end{pmatrix} + \mathbf{O}(\delta^{2/3}; \vartheta, D_1, \ldots, D_8), \qquad (24)$$

где $\mathbb{S}_1(\delta,\theta,\varphi)$ и $\mathbb{S}_1(\delta,\theta,\varphi)$ определяются формулами (18), если в них заменить $\alpha^{-1/4}$ на $\delta^{-2/3}\gamma^{1/3}(\varphi)(1 + O(\delta^{2/3},\varphi))$ и $\gamma(\varphi)$ определяется формулой (22).

Введём оператор $R_1\colon W^2_\infty \to H$, определяемый формулами

$$\begin{aligned} &R_1^1(\varphi)(\vartheta) = -(k_1/r_2)\,(r_2 - (\varphi_2'(\theta)/\varphi_2(\theta))),\\ &R_1^2(\varphi)(\vartheta) = (k_2/r_1)\,(r_1 - (\varphi_1'(\theta)/\varphi_1(\theta))), \quad \theta \in [-h,0),\\ &R_1^1(\varphi)(0) = \varphi_1(-h), \quad R_1^2(\varphi)(0) = \varphi_2(-h), \end{aligned}$$

и оператор $R_2\colon W^2_\infty \to H$, определяемый формулами

$$\begin{aligned} R_2^1(\varphi,\delta)(\theta) &= (1/2)\,\exp(\delta^{-2/3}\gamma^{1/3}(\varphi)\cos(\pi/8)\bar{\omega}(\theta))(\cos(\delta^{-2/3}\gamma^{1/3}(\varphi)\sin\pi/8)\bar{\omega}(\theta))\\ &\times (\Delta_1(\varphi) - \Delta_2(\varphi)) + \sin(\delta^{-2/3}\gamma^{1/3}(\varphi)\sin(\pi/8)\bar{\omega}(\theta))(\Delta_1(\varphi) + \Delta_2(\varphi)))\\ &+ (1/2)\,\exp(\delta^{-2/3}\gamma^{1/3}(\varphi)\sin(\pi/8)\bar{\omega}(\theta))(\cos(\delta^{-2/3}\gamma^{1/3}(\varphi)\cos(\pi/8)\bar{\omega}(\theta))\\ &\times (\Delta_1(\varphi) + \Delta_2(\varphi)) + \sin(\delta^{-2/3}\gamma^{1/3}(\varphi)\cos(\pi/8)\bar{\omega}(\theta))(\Delta_1(\varphi) - \Delta_2(\varphi)))\\ &+ R_1^1(\varphi)(\theta),\\ R_2^2(\varphi,\delta)(\theta) &= (1/2)\,(\exp(\delta^{-2/3}\gamma^{1/3}(\varphi)\cos(\pi/8)\bar{\omega}(\theta))(\cos(\delta^{-2/3}\gamma^{1/3}(\varphi)\sin(\pi/8)\bar{\omega}(\theta))\\ &\times (\Delta_1(\varphi) + \Delta_2(\varphi))\sigma(\theta) - \sin(\delta^{-2/3}\gamma^{1/3}(\varphi)\sin(\pi/8)\bar{\omega}(\theta))(\Delta_1(\varphi) - \Delta_2(\varphi)))\\ &+ \exp(\delta^{-2/3}\gamma^{1/3}(\varphi)\sin(\pi/8)\bar{\omega}(\theta))(\cos(\delta^{-2/3}\gamma^{1/3}(\varphi)\cos(\pi/8)\bar{\omega}(\theta))\\ &\times (\Delta_1(\varphi) - \Delta_2(\varphi)) - \sin(\delta^{-2/3}\gamma^{1/3}(\varphi)\cos(\pi/8)\bar{\omega}(\theta))(\Delta_1(\varphi) + \Delta_2(\varphi))))\\ &+ R_1^2(\varphi)(\theta), \quad \theta[-h,0), \quad R_2(\varphi,\delta)(0) = R_2(\varphi,\delta)(-0). \end{aligned}$$

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для уравнения $U(x) = \varphi$ операторы $R_1\colon D \to H_2$ и $R_2\colon D \to H_2$ являются регуляризирующими.

Доказательство. Множество φ_p, для которых существуют точные решения x_p уравнения $U(x) = \varphi_p$, всюду плотно в H_2 [13]. Пусть φ_δ — приближение для φ_p и φ_δ, φ_p принадлежат множеству $\{\varphi : \Delta(\varphi) \neq 0,\ \varphi_1, \varphi_2 \in W^2_\infty[-h,0]\}$.

Имеют место неравенства

$$\begin{aligned} ||R_1(\varphi_\delta) - x_p|| &\leq ||R_1(\varphi_\delta) - R(\varphi_\delta,\delta)|| + ||R(\varphi_\delta,\delta) - x_p||,\\ ||R_2(\varphi_\delta,\delta) - x_p|| &\leq ||R_2(\varphi_\delta,\delta) - R(\varphi_\delta,\delta)|| + ||R(\varphi_\delta,\delta) - x_p||. \end{aligned} \qquad (25)$$

Используя формулу (24), находим $R(\varphi_\delta,\delta)(0) - R_1(\varphi_\delta)(0) = O(\delta^{2/3};\varphi_\delta)$. При $\theta \in [-h,0)$ имеем

$$\int_{-h}^{0}(R_1(\varphi_\delta)(s) - R(\varphi_\delta,\delta)(s))^\top (R_1(\varphi_\delta)(s) - R(\varphi_\delta,\delta)(s))\,ds$$
$$= \sum_{k,j=1}^{2}\sum_{p,q=1}^{4} t_{kp}t_{jq}\int_{-h}^{0}\exp\left(\delta^{-2/3}(\gamma^{1/3}(\varphi_\delta)+O(\delta^{2/3}))(e_p+e_q)\int_0^s \omega(\tau)\,d\tau\right)ds.$$

Так как $(e_p+e_q)\int_0^s \omega(\tau)\,d\tau \neq 0$ при $p,q = 1,\ldots,4$, $s\in[-h,0]$, то справедливо равенство

$$\int\limits_{-h}^{0}(R_1(\varphi_\delta)(s) - R(\varphi_\delta,\delta)(s))^2 ds = O(\delta^{2/3};\varphi_\delta).$$

В результате находим асимптотическую оценку $||R_1(\varphi_\delta)-R(\varphi_\delta,\delta)|| = O(\delta^{2/3},\varphi_\delta)$. Используя аналогичные рассуждения находим асимптотическую оценку $||R_2(\varphi_\delta,\delta) - R(\varphi_\delta,\delta)|| = O(\delta^{2/3},\varphi_\delta)$.

Учитывая полученные оценки, свойство регуляризирующего оператора R и неравенства (25), завершаем доказательство теоремы. $\square$

5. Асимптотика регуляризованных решений

Пусть H_{loc} — пространство функций определенных на полуоси $(-\infty,-h]$, сужение которого на любой конечный отрезок $[t^-,-h]$, $t^- < -h$, является гильбертовым пространством H_{t^-} со скалярным произведением $\langle x,y\rangle_{t^-} = \int_{t^-}^{-h} y^\top(s)x(s)\mu(ds)$, где $\mu(s) = s/h+m$, $s\in[(m-1)h,mh)$, $m\le -1$, $\mu(-h) = -1$. Для произвольного решения $x_m(\theta,\varphi,\delta)$, $\theta\in[-h,0]$, $m\le -1$, системы (3), рассмотрим функцию $x(\cdot,\varphi,\delta)\in H_{loc}$, определяемую с помощью формул $x(mh+\theta,\varphi,\delta) = x_m(\theta,\varphi,\delta)$, $\theta\in(-h,0]$, $m\le -1$. Пусть $x_p(\cdot)$ — точное решение системы (2) на отрезке $[t^-,-h]$, отвечающее начальной функции $\varphi_p\in D$, а $\varphi_\delta\in D$ — возмущение последней начальной функции. Имеет место неравенство

$$\|x(\cdot,\varphi_\delta,\delta) - x_p(\cdot)\|_{t^-} = \left(\int_{t^-}^{-h}(x(s,\varphi_\delta,\delta) - x_p(s))^2\mu(ds)\right)^{1/2}$$
$$\le \sum_{j=1}^{N}\left(\int_{-r}^{0}(x_{-j}(\theta,\varphi_\delta,\delta) - x_p(-jh+\theta))^2\mu(d(-jh+\theta))\right)^{1/2}$$
$$= \sum_{j=1}^{N}\|x_{-j}(\cdot,\varphi_\delta,\delta) - x_p(-jh+\cdot)\| = \sum_{j=1}^{N}\|R(x_{-j+1}(\cdot,\varphi_\delta,\delta),\delta)(\cdot) - x_p(-jh+\cdot)\|.$$

Здесь N совпадает с целой частью числа $|t^-|/h$, $||\varphi|| = (\varphi,\varphi)^{1/2}$. Для регуляризирующего оператора R последняя сумма может быть сделана как угодно малой. Следовательно, в задаче нахождения решений системы (2) для любого $t^- < -h$ отображение $D \to H_{t^-}$, определяемое формулой $\varphi \to x(\cdot,\varphi,\delta)$, является регуляризирующим. Функции $x(\cdot,\varphi,\delta) \in H_{loc}$ будем называть регуляризованными решениями системы (2) на отрицательной полуоси.

Для начальной функции $\varphi \in W_\infty^{N+1}([-h,0],\mathbb{R}^2)$, $N \geq 2$, рассмотрим последовательность функций

$$\varphi^m(\theta) = \left(-\frac{k_1}{r_2}\left(r_2 - \frac{\varphi_2^{m+1\prime}(\theta)}{\varphi_2^{m+1}(\theta)}\right), \frac{k_2}{r_1}\left(r_1 - \frac{\varphi_1^{m+1\prime}(\theta)}{\varphi_1^{m+1}(\theta)}\right)\right)^\top,$$
$$m = -N, \dots, -1, \quad \varphi^0(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-h,0].$$

Используя эту последовательность, определим новые последовательности

$$x_m^1(\theta,\varphi) = R_1(\varphi_{m+1})(\theta), \qquad m = -N,\dots,-1, \;\; \theta \in [-h,0],$$
$$x_m^2(\theta,\varphi,\delta) = R_2(\varphi_{m+1},\delta)(\theta), \;\; m = -N,\dots,-1, \;\; \theta \in [-h,0].$$

Введем функции $x^1(\cdot,\varphi)$, $x^2(\cdot,\varphi,\delta) \in H_{t^-}$, с помощью формул $x^1(t,\varphi) = x_m^1(t - mh,\varphi)$, $x^2(t,\varphi,\delta) = x_m^2(t-mh,\varphi,\delta)$, $t \in ((m-1)h, mh]$, $m = -N+1,\dots,-1$, $x^1(t,\varphi) = x_m^1(t-mh,\varphi)$, $x^2(t,\varphi,\delta) = x_m^2(t-mh,\varphi,\delta)$, $t \in [t^-, -Nh]$. Здесь N равняется целой части числа $|t^-|/h$.

Теорема 5. В задаче построения решений системы (2) на отрезке $[t^-,-h]$ для начальных функций из множества $\{\varphi\colon \Delta(\varphi_m) \neq 0$, $m = -N+1,\dots,-1$, $\varphi \in W_\infty^{N+1}([-h,0],\mathbb{R}^2)\}$ отображения $W_\infty^{N+1}([-h,0],\mathbb{R}^2) \to H_{t^-}$, определяемые формулами $\varphi \to x^1(\cdot,\varphi)$ и $\varphi \to x^2(\cdot,\varphi,\delta)$ являются регуляризирующими. Здесь целая часть числа $|t^-|/h$ равняется N.

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству Теоремы 5 работы [10].

Функции $x^1(\cdot,\varphi) \in H_{t^-}$ и $x^2(\cdot,\varphi,\delta) \in H_{t^-}$ будем называть асимптотическими регуляризованными решениями системы (2) на отрезке $[t^-,-h]$.

6. Пример

Рассмотрим систему с запаздыванием

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= (1 - (1/3)\,x_2(t-1))x_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= (1/2)\,(1-(1/2)\,x_1(t-1))x_2(t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \end{aligned} \tag{26}$$

с заданной начальной функцией $\varphi = (2 - e^t, e^t)^\top$ на отрезке $[-1,0]$. Построим асимптотическое регуляризованное решение на отрезке $[-3,-1]$. Первое регуляризованное решение на отрезке $[-2,-1]$ определяется формулой $x^1(\theta,\varphi) = (2, 6/(2-e^\theta))^\top$, и на отрезке $[-3,-2]$ — формулой $x^1(\theta,\varphi) = (-2+$

$4e^{\theta}/(2-e^{\theta}),3)^{\top}$. На приведённых рисунках отражены результаты вычислений при значении допустимой погрешности $\delta = 10^{-4}$. График асимптотического регулризованного решения $x^2(\cdot,\varphi,\delta)$ изображён серым цветом, а график асимптотического регуляризованного решения $x^1(\cdot,\varphi)$ — чёрным.

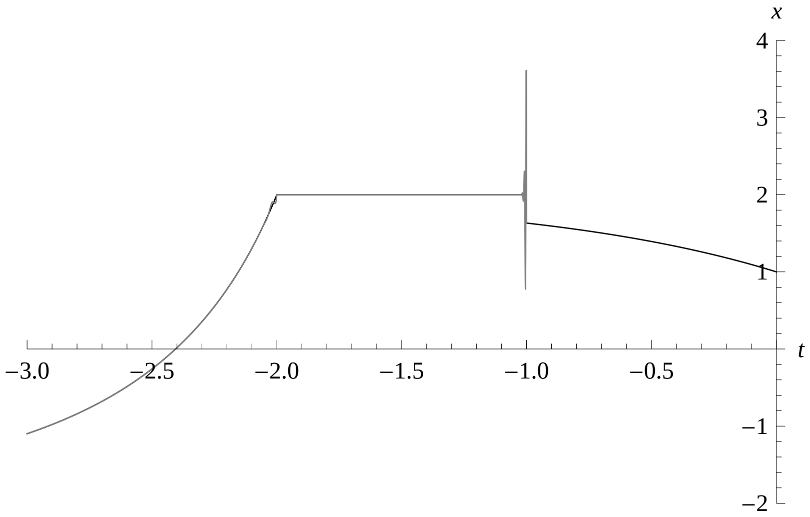

Рис. 1: Компонента x_1 регуляризованного решения системы (26).

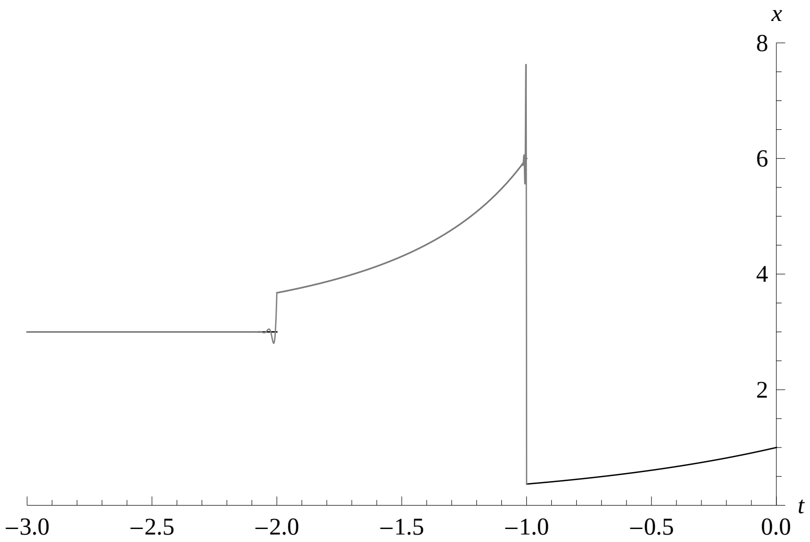

Рис. 2: Компонента x_2 регуляризованного решения системы (26).

Список литературы

1. *Марри Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. М.: Мир, 1983.

2. *Velupillai K.V., Dharmaraj N.* The Time-to-Build Tradition in Business Cycle Modelling // ASSRU Discussion Paper. 2011. 09-11, March, Trento.

3. *Ruan S.* On Nonlinear Dynamics of Predator-Prey Models with Discrete Delay // Math. Model. Nat. Phenom. Vol. 4, No. 2. 2009. pp. 140–188.

4. *Смит Дж.М.* Модели в экологии. М.: Мир, 1976.

5. *Goodwin R.M.* A Growth Cycle. Socialism, Capitalism and Economic Growth. Cambridge: Cambridge University Press. 1967.

6. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.

7. Доклад о состоянии и охране окружающей среды Вологодской области в 2006 году / Правительство Вологодской области, департамент природных ресурсов и охраны окружающей среды Вологодской области. Вологда, 2007.

8. *Колесов А.Ю., Колесов Ю.С.* Релаксационные колебания в математических моделях экологии // Тр. матем ин-та В.А. Стеклова. 1993. Т. 199. 123 с.

9. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.

10. *Долгий Ю.Ф., Сурков П.Г.* Некорректная задача восстановления численности популяции в математической модели Хатчинсона // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. №1. С. 70 – 84.

11. *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. М.: Наука, 1972.

12. *Рапопорт* О некоторых асимптотических методах для обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1953.

13. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.