В.В. Морозов, В.Ю. Решетов

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ИГРОВОЙ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ*

1. Введение

Игровые задачи распределения ресурсов достаточно распространены в литературе. Хорошо известны модели Гросса [1], Гермейера [2], а также более общая модель Дрешера [3], исследованная в [4]. В [5] решались игры с дополнительными ограничениями на ресурсы. В [6] изучалась модель защиты объекта, в которой противодействующие стороны использовали несколько видов средств нападения и защиты. Эти средства предполагались ограниченными и бесконечно-делимыми. Выигрышем нападения (первого игрока) являлась вероятность преодоления каждого средства защиты хотя бы одним средством нападения.

Другим возможным выигрышем нападения может быть вероятность преодоления некоторым средством нападения всех средств защиты. В данной статье первым игроком удобнее считать защиту. Целью защиты будет максимизация вероятности уничтожения каждого из средств нападения хотя бы одним средством защиты. При этом, как и в [6], в отличие от упомянутых выше моделей функция выигрыша первого игрока имеет весьма специальный вид. В данной работе предполагается, что защита использует не менее одной единицы средства каждого вида. При этом ограничении показано, что оптимальной стратегией защиты является ее чистая максиминная стратегия, а оптимальная смешанная стратегия нападения состоит в выборе с определенными вероятностями только одного из своих средств. Поиск оптимальных стратегий игроков сведен к решению задач линейного программирования.

2. Постановка задачи

Защита (первый игрок) использует m видов средств для предотвращения прорыва к защищаемому объекту n видов средств нападения (второго игрока). Пусть $a_i > 0$ − стоимость единицы i-го средства защиты, $b_j > 0$ − стоимость единицы j-го средства нападения, а x_i и y_j − количество денег, выделяемых защитой и нападением на приобретение соответственно i-го и j-го средств. Тогда защита использует i-е средство в количестве x_i / a_i, а нападение − j-е средство в количестве y_j / b_j. Пусть A и B − об-

* Исследование выполнено в рамках госбюджетной темы и частично при финансовой поддержке РФФИ, научный проект № 16-01-00353 а.

щие денежные суммы, имеющиеся в распоряжении соответственно защиты и нападения.

В дальнейшем будем считать, что $x_i \ge a_i,\ i = 1,...,m,$ т.е. защита приобретает не менее одной единицы средства каждого вида. Стратегии игроков x и y принадлежат множествам

$$X = \left\{ x \in R^m \mid \sum_{i=1}^{m} x_i = A,\ x_i \ge a_i,\ i = 1,...,m \right\},\ Y = \left\{ y \in R_+^n \mid \sum_{j=1}^{n} y_j = B \right\}.$$

Здесь предполагается, что $A > a_1 + ... + a_m$. Пусть $p_{ij} \in (0,1)$ − вероятность уничтожения i-м средством защиты j-го средства нападения. Вероятность прорыва j-го средства нападения в количестве y_j / b_j через i-е средство защиты в количестве x_i / a_i зададим формулой из [7] $P_{ij}(x_i, y_j) = (1 - p_{ij}^{y_j/b_j})^{x_i/a_i}$. Тогда при использовании игроками стратегий x и y вероятность уничтожения защитой всех средств нападения равна

$$F(x, y) = \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \prod_{i=1}^{m} P_{ij}(x_i, y_j) \right).$$

Рассмотрим антагонистическую игру $\Gamma = \langle X, Y, F(x, y) \rangle$. В п.3 приводятся некоторые свойства Z-образных функций, с помощью которых в п.4 дается метод решения игры Γ.

3. Свойства Z-образных функций

Лемма. *Пусть* $B > 0,\ t \ge 1,\ \alpha \in (0,1)$. *Тогда функция*

$$\varphi(z) = [1 - (1 - \alpha^B)^t]^{z/B} + (1 - \alpha^z)^t$$

удовлетворяет неравенству $\varphi(z) \le 1$ *при всех* $z \in [0, B]$ *и неравенству* $\varphi(z) \ge 1$ *при всех* $z \ge B$.

Доказательство. Заметим, что $\varphi(0) = \varphi(B) = 1$. Утверждение леммы очевидно при $t = 1$, поскольку в этом случае $\varphi(z) \equiv 1$. Поэтому далее будем считать, что $t > 1$. Обозначим $\beta = [1 - (1 - \alpha^B)^t]^{1/B}$, $\gamma = \ln \alpha / \ln \beta$. Нетрудно показать, что $\alpha < \beta < 1$, поскольку $t > 1$. Отсюда $\gamma > 1$. Теперь функция $\varphi(z)$ и ее производная запишутся в виде

$$\varphi(z) = \beta^z + (1 - \alpha^z)^t,\ \varphi'(z) = \beta^z \ln \beta - (1 - \alpha^z)^{t-1} \alpha^z \ln \alpha.$$

Ясно, что $\varphi'(0) = \ln \beta < 0$. Покажем, что производная $\varphi'(z)$ отрицательна при достаточно больших z. Действительно, это вытекает из равенства

$$\lim_{z \to \infty} \frac{\varphi'(z)}{\alpha^z} = \lim_{z \to \infty} \frac{\beta^z}{\alpha^z} \ln \beta - \lim_{z \to \infty} (1 - \alpha^z)^{t-1} \ln \alpha = -\infty.$$

Докажем, что при $z > 0$ производная $\varphi'(z)$ обращается в нуль ровно в двух точках $z_1 < z_2$. С учетом установленного поведения функции $\varphi(z)$ в окрестностях нуля и бесконечности отсюда будет вытекать, что $z_1 \in (0, B)$ – ее точка минимума, а $z_2 > B$ – точка максимума на полупрямой R_+ (см. график функции на рис. 1, где $B = 6,\ t = 3,\ \alpha = 0.7$). Это и завершит доказательство леммы.

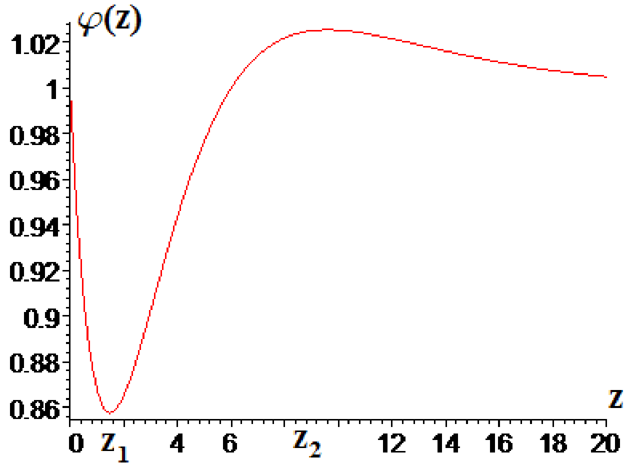

Рисунок 1.

Сделаем замену переменной $w = \beta^z$ и определим на полуинтервале $(0,1]$ функцию $\psi(w) = \varphi(\ln w / \ln \beta) = w + (1 - w^\gamma)^t$. Производные $\varphi'(z)$ и $\psi'(w)$ имеют равное число нулей. Поэтому достаточно показать, что производная $\psi'(w)$ имеет в точности два нуля. Имеем:

$$\psi'(w) = 1 - t\gamma(1 - w^\gamma)^{t-1} w^{\gamma-1},\quad \psi''(w) = t\gamma(1 - w^\gamma)^{t-2} w^{\gamma-2}[(t\gamma - 1)w^\gamma - \gamma + 1].$$

Вторая производная $\psi''(w)$ обращается в нуль в единственной точке $w^* = ((\gamma - 1)/(\gamma t - 1))^{1/\gamma}$. Следовательно, первая производная $\psi'(w)$ обращается в нуль ровно в двух точках. ■

Возьмем числа $\alpha_i \in (0,1),\ u_i \ge 1,\ i = 1, \ldots, m,$ и определим при $z \ge 0$ функцию $f_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}^{u_1 \ldots u_m}(z) = 1 - (1 - \alpha_1^z)^{u_1} \cdots (1 - \alpha_m^z)^{u_m}$. Если $u_i = 1,\ i = 1, \ldots, m,$ то верхние индексы будем опускать. $f_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}^{u_1 \ldots u_m}(z)$ принадлежит классу убывающих Z-образных функций, для которых выполнены соотношения

$$f_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}^{u_1 \ldots u_m}(0) = 1,\quad \frac{d}{dz} f_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}^{u_1 \ldots u_m}(0) = 0,\quad \lim_{z \to \infty} f_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}^{u_1 \ldots u_m}(z) = 0.$$

Функции $f_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}(z)$ изучались в [6]. Следующее утверждение обобщает результат из [6].

Утверждение 1. *Пусть* $\alpha_i, \beta_i \in (0,1),\ u_i \ge 1,\ i = 1, \ldots, m.$ *Тогда для любых* $z_1, z_2 \ge 0$ *выполнено неравенство*

$$f_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}^{u_1 \ldots u_m}(z_1) f_{\beta_1 \ldots \beta_m}^{u_1 \ldots u_m}(z_2) \ge \min[f_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}^{u_1 \ldots u_m}(z_1 + z_2), f_{\beta_1 \ldots \beta_m}^{u_1 \ldots u_m}(z_1 + z_2)]. \quad (1)$$

Доказательство. Если z_1 или z_2 равно нулю, то утверждение очевидно. Зафиксируем $z_1, z_2 > 0$. При $u_i = 1,\ i = 1, \ldots, m,$ неравенство (1) дока-

зано в [6]. В общем случае введем числа $\delta_i, \xi_i \in (0,1), i = 1,...,m,$ с помощью равенств $(1-\alpha_i^{z_1})^{u_i} = 1-\delta_i^{z_1}$, $(1-\beta_i^{z_2})^{u_i} = 1-\xi_i^{z_2}$, $i = 1,...,m.$
Отсюда

$$\delta_i = [1-(1-\alpha_i^{z_1})^{u_i}]^{1/z_1}, \ \xi_i = [1-(1-\beta_i^{z_2})^{u_i}]^{1/z_2}, \ i = 1,...,m. \tag{2}$$

Тогда можно записать неравенство (1) для функций $f_{\delta_1...\delta_m}(z)$ и $f_{\xi_1...\xi_m}(z)$:

$$f_{\alpha_1...\alpha_m}^{u_1...u_m}(z_1) f_{\beta_1...\beta_m}^{u_1...u_m}(z_2) = f_{\delta_1...\delta_m}(z_1) f_{\xi_1...\xi_m}(z_2) \ge \min[f_{\delta_1...\delta_m}(z_1+z_2), f_{\xi_1...\xi_m}(z_1+z_2)].$$

Для доказательства (1) достаточно установить справедливость неравенств

$$f_{\delta_1...\delta_m}(z_1+z_2) = 1-\prod_{i=1}^{m}(1-\delta_i^{z_1+z_2}) \ge 1-\prod_{i=1}^{m}(1-\alpha_i^{z_1+z_2})^{u_i} = f_{\alpha_1...\alpha_m}^{u_1...u_m}(z_1+z_2)$$

и $f_{\xi_1...\xi_m}(z_1+z_2) \ge f_{\beta_1...\beta_m}^{u_1...u_m}(z_1+z_2)$. Но, к примеру, первое из них следует из неравенств $(1-\alpha_i^{z_1+z_2})^{u_i} \ge 1-\delta_i^{z_1+z_2}$, $i = 1,...,m,$ или с учетом (2)

$$[1-(1-\alpha_i^{z_1+z_2})^{u_i}]^{z_1/(z_1+z_2)} + (1-\alpha_i^{z_1})^{u_i} \le 1, \ i = 1,...,m. \tag{3}$$

Последние неравенства вытекают из леммы. В самом деле, если в формулировке леммы положить $B = z_1 + z_2$, $t = u_i$, $\alpha = \alpha_i$, то i-е неравенство в (3) можно записать в виде $\varphi(z_1) \le 1$. ■

Следствие 1. *Пусть* $\alpha_{ij} \in (0,1)$, $u_i \ge 1$, $i = 1,...,m, j = 1,...,n.$ *Тогда для любых* $z_j \ge 0, j = 1,...,n,$ *выполнено неравенство*

$$\prod_{j=1}^{n} f_{\alpha_{1j}...\alpha_{mj}}^{u_1...u_m}(z_j) \ge \min_{1\le j\le n} f_{\alpha_{1j}...\alpha_{mj}}^{u_1...u_m}(z_1+...+z_n). \tag{4}$$

Неравенство (4) выводится из (1) индукцией по n.

4. Решение игры Γ

Введем обозначения $\lambda_{ij} = p_{ij}^{1/b_j}$, $i = 1,...,m, j = 1,...,n.$ Тогда вероятности $P_{ij}(x_i, y_j) = (1-\lambda_{ij}^{y_j})^{x_i/a_i}$, а функцию выигрыша первого игрока можно записать в виде

$$F(x,y) = \prod_{j=1}^{n} f_{\lambda_{1j}...\lambda_{mj}}^{x_1/a_1...x_m/a_m}(y_j). \tag{5}$$

Положим $y^{(j)} = (0,...,0,B,0,...,0) \in R^n$, где компонента B располагается на j-м месте, $j = 1,...,n.$ Использование нападением стратегии $y^{(j)}$ означает применение им только j-го средства. Отметим, что $y^{(j)}$ является крайней точкой множества Y.

Утверждение 2. *В игре* Γ *для любой стратегии первого игрока* $x \in X$ *справедливо равенство*

$$\min_{y\in Y} F(x,y) = \min_{1\le j\le n} F(x, y^{(j)}). \tag{6}$$

Доказательство. Возьмем произвольную стратегию $x \in X$. Для любой стратегии $y \in Y$ из (4) и (5) получаем неравенство

$$F(x,y) = \prod_{j=1}^{n} f_{\lambda_{1j}\ldots\lambda_{mj}}^{x_1/a_1\ldots x_m/a_m}(y_j) \geq \min_{1\leq j\leq n} f_{\lambda_{1j}\ldots\lambda_{mj}}^{x_1/a_1\ldots x_m/a_m}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) = \min_{1\leq j\leq n} f_{\lambda_{1j}\ldots\lambda_{mj}}^{x_1/a_1\ldots x_m/a_m}(B).$$

Отсюда

$$\min_{y\in Y} F(x,y) \geq \min_{1\leq j\leq n} f_{\lambda_{1j}\ldots\lambda_{mj}}^{x_1/a_1\ldots x_m/a_m}(B) = \min_{1\leq j\leq n} F(x,y^{(j)}) \geq \min_{y\in Y} F(x,y)$$

и равенство (6) доказано. ■

Следствие 2. *Нижнее значение* $\underline{v}$ *игры* Γ *представимо в виде*

$$\underline{v} = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} F(x,y) = \max_{x\in X}\min_{1\leq j\leq n} F(x,y^{(j)}),$$

а максиминная стратегия x^0 *определяется из равенства*

$$\max_{x\in X}\min_{1\leq j\leq n} F(x,y^{(j)}) = \min_{1\leq j\leq n} F(x^0,y^{(j)}).$$

Для каждого $x \in X$ и $j = 1,\ldots,n$ запишем выигрыш

$$F(x,y^{(j)}) = 1 - \prod_{i=1}^{m}(1-\lambda_{ij}^{B})^{x_i/a_i} = 1 - \exp\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{x_i}{a_i}\ln(1-\lambda_{ij}^{B})\right). \quad (7)$$

Из формулы (7) следует, что функция $F(x,y^{(j)})$ вогнута по x. Пусть q − вероятностный вектор размерности n, т.е. $q \in Q = \left\{q \in R_+^n \mid q_1 + \ldots + q_n = 1\right\}$. Вектор q задает следующую смешанную стратегию второго игрока: с вероятностью q_j он выбирает чистую стратегию $y^{(j)}$. Если игроки используют стратегии x и q, то ожидаемый выигрыш первого игрока равен

$$\Phi(x,q) = \sum_{j=1}^{n} F(x,y^{(j)})q_j.$$

Теорема. *Значение* v *игры* Γ *равно* $\underline{v}$, *при этом первый игрок имеет оптимальную чистую (максиминную) стратегию* x^0, *а оптимальной стратегией второго игрока является такое вероятностное распределение* $q^0 \in Q$, *что пара* (x^0,q^0) *образует седловую точку функции* $\Phi(x,q)$ *на произведении* $X \times Q$.

Доказательство. Функция $\Phi(x,q)$ вогнута по x и линейна по q. Поэтому она имеет седловую точку (x^0,q^0) на произведении $X \times Q$. При этом x^0 является максиминной, а q^0 − минимаксной стратегией для функции $\Phi(x,q)$, т.е.

$$\min_{q\in Q}\Phi(x^0,q) = \max_{x\in X}\min_{q\in Q}\Phi(x,q) = \min_{q\in Q}\max_{x\in X}\Phi(x,q) = \max_{x\in X}\Phi(x,q^0)$$

(см., например, [8]). Поскольку при любом $x \in X$

$$\min_{q\in Q}\Phi(x,q) = \min_{1\leq j\leq n} F(x,y^{(j)}),$$

x^0 является чистой максиминной стратегией в игре Γ и

$$\underline{v} = \max_{x \in X} \min_{1 \le j \le n} F(x, y^{(j)}) = \max_{x \in X} \min_{q \in Q} \Phi(x,q) = \min_{q \in Q} \max_{x \in X} \Phi(x,q) = \max_{x \in X} \Phi(x, q^0).$$

Используя смешанную стратегию q^0, второй игрок не позволит первому выиграть больше $\underline{v}$. Отсюда следует, что $(x^0, q^0, \underline{v})$ − решение игры Γ. ■

Займемся поиском решения $(x^0, q^0, \underline{v})$. Из (7) получаем

$$\underline{v} = \max_{x \in X} \min_{1 \le j \le n} F(x, y^{(j)}) = 1 - \exp\left(-\max_{x \in X} \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i}{a_i} (-\ln(1 - \lambda_{ij}^B)) \right). \qquad (8)$$

Отсюда следует, что для нахождения максиминной стратегии достаточно ввести дополнительную переменную w и решить задачу линейного программирования (см., например, [8])

$$w \to \max_{(x,w):} \qquad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i}{a_i} (-\ln(1 - \lambda_{ij}^B)) \ge w, \; j = 1,...,n, \; \sum_{i=1}^{m} x_i = A, \; x_i \ge a_i, \; i = 1,...,m.$$

Если (x^0, w^0) − оптимальное решение задачи (9), то x^0 − максиминная стратегия, а $\underline{v} = 1 - \exp(-w^0)$ − значение игры Γ.

Найдем теперь оптимальную стратегию q^0 второго игрока. Определим множество $J(x^0) = \{ j \mid F(x^0, y^{(j)}) = \underline{v} \}$. Заметим, что

$$\underline{v} = \Phi(x^0, q^0) = \sum_{j=1}^{n} F(x^0, y^{(j)}) q_j^0 = \min_{q \in Q} \Phi(x^0, q) = \min_{1 \le j \le n} F(x^0, y^{(j)}).$$

Отсюда $F(x^0, y^{(j)}) \ge \underline{v}$, $j = 1,...,n$, и $q_j^0 = 0$ для $j \notin J(x^0)$. Осталось записать условие для x^0 как точки максимума вогнутой дифференцируемой функции $\Phi(x, q^0)$ на множестве X (см., например, [9]): найдется такое число μ, что

$$\sum_{j \in J(x^0)} F'_{x_i}(x^0, y^{(j)}) q_j^0 \begin{cases} = \mu, \; x_i^0 > a_i, \\ \le \mu, \; x_i^0 = a_i, \end{cases} \sum_{j \in J(x^0)} q_j^0 = 1, \; q_j^0 \ge 0, \quad j \in J(x^0). \qquad (10)$$

Таким образом, необходимо решить линейную систему (10) относительно переменных μ и q_j^0, $j \in J(x^0)$, что также сводится к задаче линейного программирования.

Отметим случаи, когда игра Γ имеет решение в чистых стратегиях.

Если $J(x^0) = \{k\}$, то $y^{(k)}$ − оптимальная чистая стратегия второго игрока.

Вторая возможность связана с использованием первым игроком стратегий

$$x^{(i)} = (x_1^{(i)}, ..., x_m^{(i)}) : x_l^{(i)} = a_l, \; l \ne i, \; x_i^{(i)} = A - \sum_{l \ne i} a_l, \; l = 1,...,m.$$

Применение защитой стратегии $x^{(i)}$ означает использование в точности одной единицы каждого средства, кроме i-го. Определим $m \times n$-матрицу

$H=(h_{ij})$ с элементами $h_{ij}=F(x^{(i)},y^{(j)}),\ i=1,...,m,\ j=1,...,n.$ Как и в [6], можно доказать, что в игре Γ существует решение в чистых стратегиях, если матрица H имеет седловую точку.

Пример. Возьмем следующие значения параметров:

$$n=m=3,\ A=15,\ B=5,\ a_1=a_3=3,\ a_2=4,\ b_1=b_3=2,\ b_2=3,$$

$$(p_{ij})=\begin{pmatrix}0.75 & 0.74 & 0.78\\ 0.66 & 0.77 & 0.8\\ 0.82 & 0.85 & 0.77\end{pmatrix}.$$

Решение игры Γ: ее значение $v=0.9722,$ оптимальная (максиминная) стратегия защиты $x^0=(3.27,4,7.73),$ оптимальная стратегия нападения $q^0=(0.1182,0,0.8818).$ Если взять $p_{13}=0.6,$ то игра имеет решение в чистых стратегиях: $v=0.9558,\ x^0=(8,4,3),\ y^0=(0,0,5).$ Здесь $J(x^0)=\{3\}$.

Литература

1. *Gross O., Wagner R.* A continuous colonel Blotto game/ U.S. Air Force project RAND, Research Memorandum RM−480, 1950.
2. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
3. *Дрешер М.* Стратегические игры. Теория игр и приложения. М: Советское радио, 1964.
4. *Огарышев В.Ф.* Смешанные стратегии в одном обобщении модели Гросса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1974. Т. 13. № 1. С. 59−70.
5. *Давыдов Э.Г.* Исследование операций. М: Высшая школа, 1990.
6. *Морозов В.В., Шалбузов К.Д.* Игровая модель распределения ресурсов при защите объекта // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5. № 4. С. 66−83.
7. *Фейн У.У.* Роль связи в войне. Применение теория игр к задачам военной связи. В кн. [3] С. 246–259.
8. *Васин А.А., Морозов В.В.* Теория игр и модели экономической экономики. М.: МАКС-Пресс, 2005.
9. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. М: Физматлит, 2011.