С.А. Волошин

О СХОДИМОСТИ МОНОТОННЫХ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ

В статье рассматриваются устойчивые (в смысле [1]) конечно - разностные аппроксимации слабого решения задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial f(v)}{\partial x}=0, \qquad v(x,0)=v_0(x) \tag{1}$$

В работах [2-8] исследовались монотонные схемы, аппроксимирующие уравнение (1). В данной статье результаты аналогичные [2-8] распространяются на некоторый более широкий класс монотонных схем, включающий в себя как явные так и неявные конечно-разностные аппроксимации.

Пусть t_n, x_i – узлы прямоугольной сетки. Рассмотрим в полупространстве $\{x\in R, t\ge 0\}$ сеточную функцию u_τ, которая принимает постоянные значения u_i^n в прямоугольниках

$$\Pi_i^n=\{t_n\le t<t_{n+1}\}\times\{x_i\le x<x_{i+1}\}.$$

Введем еще множества $K(A)=\{v\,|\,v\in L_1(R),|v|\le A\}$ и $K_\tau(A)=P_\tau K(A)$, где P_τ – оператор, определяемый формулой

$$P_\tau v(x)=\frac{1}{h_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}}v(y)dy,\ x\in[x_i,x_{i+1}),\ h_i=x_{i+1}-x_i. \tag{2}$$

Каждой сеточной функции $u\in\{u_i\}$ сопоставим векторную сеточную функцию $U=\{U_i\}$, полагая $U_i=\{u_{i+p}\}$, $p\in I$, где I – множество индексов p, удовлетворяющих условию $|p|\le l$.

Рассмотрим в полупространстве $\{x\in R, t\ge 0\}$ конечно-разностную схему

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau}+\frac{1}{h_i}[(F_1(U_{i+1}^{n+1})-F_1(U_i^{n+1}))+(F_2(U_{i+1}^n)-F_2(U_i^n))], \tag{3}$$

где F_1 и F_2 – Липшиц непрерывные функции, согласованные с f, т.е.

$$F_1(u,u,...,u)+F_2(u,u,...,u)=f(u). \tag{4}$$

В дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что $h_i = h$ и функции F_1 и F_2 зависят от одинакового количества аргументов. Обозначим $U_{i,j}(a)$ – сеточную функцию U_i, где $u_{i+j} = a$ и

$A_{i,j}(a) = F_1(U_{i,j}(a)), \quad B_{i,j}(a) = F_2(U_{i,j}(a)).$

Схему (3) назовем ***монотонной*** на $K_\tau(A)$, если для любой сеточной функции U и $j \neq 0$ выполнены следующие условия

$$\operatorname{sgn}(a-b)[A_{i+1,j-1}(a) - A_{i+1,j-1}(b)] \le \operatorname{sgn}(a-b)[A_{i,j}(a) - A_{i,j}(b)], \qquad (5)$$

$$\operatorname{sgn}(a-b)[B_{i+1,j-1}(a) - B_{i+1,j-1}(b)] \le \operatorname{sgn}(a-b)[B_{i,j}(a) - B_{i,j}(b)], \qquad (6)$$

$$\sigma \cdot Q(a,b) \le |a-b|, \qquad (7)$$

где

$$\sigma = \frac{\tau}{h}, \quad Q(a,b) = |B_{i+1,-1}(a) - B_{i+1,-1}(b)| + |B_{i,0}(a) - B_{i,0}(b)|.$$

Заметим, что условие (7) эквивалентно условию Куранта.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пусть $U_i = \{u_i, u_{i-1}\}$, тогда $F_k(U_i) = F_k(u_i, u_{i-1}), k = 1,2$. Выясним, что означают условия (5), (6). При $j = 1$ имеем

$\operatorname{sgn}(a-b)[F_k(a,u_i) - F_k(b,u_i)] \le 0.$

При $j = -1$

$$\operatorname{sgn}(a-b)[F_k(u_i,a) - F_k(u_i,b)] \ge 0,$$

т.е. функции $F_k(x,y)$ должны быть невозрастающими по x и неубывающими по y. Пусть выполняется условие

$$\sigma \cdot |f'(u)| \le 1. \qquad (8)$$

а) Неявная схема Lax-Friedrichs

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \frac{1}{h}[F(u_{i+1}^{n+1}, u_i^{n+1}) - F(u_i^{n+1}, u_{i-1}^{n+1})] = 0,$$

где

$$F(x,y) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y)) - \frac{1}{2\sigma}(x-y).$$

Условия (5) выполнены как следствие (8).

б) Схема Engquist-Osher

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau}+\frac{1}{h}(F(u_{i+1}^n,u_i^n)-F(u_i^n,u_{i-1}^n))=0,$$

где

$$F(x,y)=f^-(x)+f^+(y),$$

$$f^+(u)=\int_0^u \max(f'(x),0)dx+f(0),\quad f^-(u)=\int_0^u \min(f'(x),0)dx.$$

Здесь условие (6) тривиально, а для (7), учитывая (8), имеем

$$\sigma\cdot(|f^+(a)-f^+(b)|+|f^-(a)-f^-(b)|)=$$
$$=\sigma\cdot|(f^+(a)-f^-(a))-(f^+(b)-f^-(b))|\le|a-b|.$$

1. Устойчивость метода

Перепишем схему (3) в виде

$$u_i^{n+1}+\sigma\cdot[F_1(U_{i+1}^{n+1})-F_1(U_i^{n+1})]=u_i^n-\sigma\cdot[F_2(U_{i+1}^n)-F_2(U_i^n)]$$

или в операторной записи

$$u^{n+1}+G(U^{n+1})=T(U^n). \tag{9}$$

Лемма 1. Пусть схема (3) монотонна на $K_\tau(A)$. Тогда оператор T сохраняет порядок, т.е. если $u_i\ge v_i$, то $T(U)_i\ge T(V)_i$.

Доказательство. Для простоты будем считать ,что

$$F_2(U_i)=F_2(u_{i+1},u_i,u_{i-1}).$$

Тогда

$$u_i^{n+1}-v_i^{n+1}=u_i^n-v_i^n-\sigma\left[F_2(U_{i+1}^n)-F_2(V_{i+1}^n)-\left(F_2(U_i^n)-F_2(V_i^n)\right)\right]$$

или

$$z_i^{n+1}=z_i^n-\sigma\left(A_{i+1}^n-A_i^n\right).$$

Рассмотрим

$$A_{i+1}^n=F_2(U_{i+1}^n)-F_2(V_{i+1}^n)=[F_2(u_{i+2}^n,u_{i+1}^n,u_i^n)-F_2(v_{i+2}^n,u_{i+1}^n,u_i^n)]+$$
$$+[F_2(v_{i+2}^n,u_{i+1}^n,u_i^n)-F_2(v_{i+2}^n,v_{i+1}^n,u_i^n)]+[F_2(v_{i+2}^n,v_{i+1}^n,u_i^n)-F_2(v_{i+2}^n,v_{i+1}^n,v_i^n)]$$

Представляя в аналогичном виде A_i^n, получаем

$$A_{i+1}^n-A_i^n=[F_2(u_{i+2}^n,u_{i+1}^n,u_i^n)-F_2(v_{i+2}^n,u_{i+1}^n,u_i^n)]+$$

$$+([F_2(v_{i+2}^n,u_{i+1}^n,u_i^n)-F_2(v_{i+2}^n,v_{i+1}^n,u_i^n)]-[F_2(u_{i+1}^n,u_i^n,u_{i-1}^n)-F_2(v_{i+1}^n,u_i^n,u_{i-1}^n)])+$$

$$+([F_2(v_{i+2}^n,v_{i+1}^n,u_i^n)-F_2(v_{i+2}^n,v_{i+1}^n,v_i^n)]-[F_2(v_{i+1}^n,u_i^n,u_{i-1}^n)-F_2(v_{i+1}^n,v_i^n,u_{i-1}^n)])+$$

$$+[F_2(v_{i+1}^n,v_i^n,v_{i-1}^n)-F_2(v_{i+1}^n,v_i^n,u_{i-1}^n)].$$

Первое, второе и последнее слагаемые неположительные в силу (6).

Таким образом, на основании (7)

$$u_i^{n+1}-v_i^{n+1}=z_i^{n+1}\geq z_i^n-\sigma\cdot Q(u_i^n,v_i^n)\geq 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 2 (*Принцип максимума*). Если схема (3) монотонна на $K_\tau(A)$, то для любой сеточной функции $u^n\in K_\tau(A)$

$$\inf_i u_i^n\leq u_j^{n+1}\leq \sup_i u_i^n\,.$$

Доказательство. Пусть $m=\inf_i u_i^n$, $M=\sup_i u_i^n$. Полагая поочередно $v_i^n=m;\ v_i^n=M$, на основании предыдущей леммы получаем требуемое.

Следствие. Так как

$$\sum_i T(U)_i=\sum_i u_i,$$

то из результатов [9] следует оценка

$$\|T(U)-T(V)\|\leq\|u-v\|, \tag{10}$$

где

$$\|u\|=\sum_i h\cdot|u_i|.$$

Полагая в (10) $v_i=u_{i-1}$, получаем

$$Var\,T(U)\leq Var\ u. \tag{11}$$

Лемма 3. Для монотонной схемы (3)

$$\|T(U)-u\|\leq C\tau Var\ u\,. \tag{12}$$

Доказательство. Так как

$$|T(U)_i-u_i|=\sigma\cdot|F_2(U_{i+1})-F_2(U_i)|,$$

то, учитывая Липшиц-непрерывность функции F_2 и применяя неравенство треугольника, получаем оценку (12).

Будем исследовать разрешимость и устойчивость схемы (9) в терминах аккретивных операторов. Согласно [10] нелинейный оператор $G:l_1\to l_1$ называется ***аккретивным*** если для всех $u,v\in D(G)$

$$(\operatorname{sgn}(u-v), G(u)-G(v)) \geq 0 \tag{13}$$

и ***m-аккретивным***, если G – аккретивен и $R(G+I)=l_1$.

Перепишем схему (9) в виде

$$u+G(u)=w. \tag{14}$$

Лемма 4. Оператор $G(u)$, порождаемый монотонной схемой (9), аккретивен на пространстве l_1.

Доказательство. Проведем доказательство леммы для случая $U_i=\{u_{i+1},u_i,u_{i-1}\}$. Обозначим $\varphi_i=\operatorname{sgn}(u_i - v_i)$. Тогда

$$(\operatorname{sgn}(u-v), G(u)-G(v)) =$$

$$=\sum_i \tau\varphi_i[(F_1(U_{i+1})-F_1(V_{i+1}))-(F_1(U_i)-F_1(V_i))]=$$

$$=\tau\sum_i\{\varphi_{i-2}[F_1(u_i,u_{i-1},u_{i-2})-F_1(v_i,u_{i-1},u_{i-2})]+$$

$$+\varphi_{i-1}[(F_1(v_{i+1},u_i,u_{i-1})-F_1(v_{i+1},v_i,u_{i-1}))-(F_1(u_i,u_{i-1},u_{i-2})-F_1(v_i,u_{i-1},u_{i-2}))]+$$

$$+\varphi_i[(F_1(v_{i+2},v_{i+1},u_i)-F_1(v_{i+2},v_{i+1},v_i))-(F_1(v_{i+1},u_i,u_{i-1})-F_1(v_{i+1},v_i,u_{i-1}))]+$$

$$+\varphi_{i+1}[F_1(v_{i+2},v_{i+1},v_i)-F_1(v_{i+2},v_{i+1},u_i)]\}.$$

Учитывая, что сумма слагаемых, стоящих в квадратных скобках, равна нулю и условия монотонности, получаем

$$(\operatorname{sgn}(u-v), G(u)-G(v)) =$$

$$=\tau\sum_i[F_1(u_i,u_{i-1},u_{i-2})-F_1(v_i,u_{i-1},u_{i-2})]\cdot(\varphi_{i-2}-\varphi_i)+$$

$$+[F_1(v_{i+1},u_i,u_{i-1})-F_1(v_{i+1},v_i,u_{i-1}))-(F_1(u_i,u_{i-1},u_{i-2})-F_1(v_i,u_{i-1},u_{i-2}))]\cdot(\varphi_{i-1}-\varphi_i)+$$

$$+[F_1(v_{i+2},v_{i+1},v_i)-F_1(v_{i+2},v_{i+1},u_i)]\cdot(\varphi_{i+1}-\varphi_i)\geq 0,$$

что и завершает доказательство.

Обозначим $u=S(w)$ решение уравнения (14). Из леммы 4 и работ [11,12] следует, что решение (14) существует, единственно и справедливы следующие оценки

$$\|S(w_1)-S(w_2)\| \leq \|w_1-w_2\|, \tag{15}$$

$$Var\ u \leq Var\ w, \tag{16}$$

$$\|u-w\| \leq C\tau Var\ w. \tag{17}$$

Неравенство (15) показывает, что оператор S является слабо сжимающим и так как $\sum_i u_i = \sum_i w_i$, то из [9] следует, что S сохраняет порядок и справедлив принцип максимума.

Таким образом из доказанных лемм и оценок (10)-(12) и (15)-(17) следует, что решение схемы (3) существует, единственно и справедливы оценки, аналогичные (15)-(17):

$$\|u^{n+1} - v^{n+1}\| \le \|u^n - v^n\|, \tag{18}$$

$$Var\ u^{n+1} \le Var\ u^n, \tag{19}$$

$$\|u^{n+1} - u^n\| \le C\tau Var\ u^n, \tag{20}$$

$$\inf_i u_i^n \le u_j^{n+1} \le \sup_i u_i^n. \tag{21}$$

Наличие оценок (18)-(21) означает, что метод S_τ, определяемый монотонной схемой (3), устойчив в смысле [1].

2. Погрешность аппроксимации и сходимость метода

Перейдем теперь к исследованию погрешности аппроксимации схемы (3). Согласно [1], погрешность $E_a(u_\tau, v)$ метода S_τ в полосе $\{0 < t < a\} \times R$ на допустимом точном решении v уравнения (1) есть форма

$$E_a(u_\tau, v) : \psi \to E_a(u_\tau, v; \psi) = (H_a^{u_\tau, v}(\overline{\psi}) + |H_a^{u_\tau, v}(\overline{\psi})|)/2$$

на пространстве $C_\infty^0(R^2)$. Здесь $\overline{\psi}$ обозначает функцию $\overline{\psi} : (t, x, t', x') \to \psi(t - t', x - x')$, сопоставляемую каждому элементу

$$\psi \in C_\infty^0(R^2), \psi(t, x) = \omega_\varepsilon(t) \cdot \omega_\varepsilon(x),$$

где

$$\omega_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}\omega(\varepsilon^{-1}t), \omega(t) = \omega(-t) \ge 0 \text{ и } \omega(t) = 0 \text{ при } |t| \ge 1.$$

$H_a^{u_\tau, v}$ – значение на функциях указанного вида распределения

$$H_a^{u_\tau, v}(t, x, t', x') = \Theta_{0,a}(t') \cdot h_a^{u_\tau, v(t', x')}(t, x) + \Theta_{0,a}(t) \cdot h_a^{v, u_\tau(t, x)}(t', x'),$$

где

$$h_a^{u,k}(t, x) = \Theta_{0,a}(t) \cdot [\frac{\partial}{\partial t}|u(t, x) - k| + \frac{\partial}{\partial x}\Phi(u(t, x); k)],$$

$$\Phi(u; k) = \operatorname{sgn}(u - k) \cdot [f(u) - f(k)], k = const,$$

$\Theta_{a,b}$ – характеристическая функция интервала $a < t < b$.

Теорема 1. Пусть S_τ-метод, определяемый монотонной схемой (3). Тогда погрешность аппроксимации метода допускает оценку

$$E_a(u_\tau, v; \psi) \le C\tau a \|\psi\|_{W_1^1} \cdot Var\, u_\tau^0.$$

Доказательство. Так как для точного решения v имеем $h_a^{v,k}(t,x) \le 0$ (см.[1]), то оценка E_a сводится к оценке $h_a^{u_\tau,k}(t,x)$.

Учитывая, что при $t > 0$

$$\frac{\partial |u-k|}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_i [|u_i^{n+1} - k| - |u_i^n - k|] \cdot \delta(t - t_{n+1}) \Theta_{x_i, x_{i+1}}(x),$$

и

$$\frac{\partial \Phi(u;k)}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_i [\Phi(u_{i+1}^n;k) - \Phi(u_i^n;k)] \cdot \Theta_{t_n, t_{n+1}}(t) \cdot \delta(x - x_{i+1}),$$

то, обозначая для краткости

$$\Theta_i^n(t,x) = \delta(t - t_{n+1}) \cdot \Theta_{x_i, x_{i+1}}(x), \overline{\Theta}_i^n(t,x) = \Theta_{t_n, t_{n+1}}(t) \cdot \delta(x - x_{i+1}),$$

получаем

$$h^{u_\tau,k}(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_i \{[|u_i^{n+1} - k| - |u_i^n - k|] \Theta_i^n(t,x) +$$

$$+ [\Phi(u_{i+1}^n;k) - \Phi(u_i^n;k)] \cdot \overline{\Theta}_i^n(t,x)\} = \tag{22}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_t |u_i^n - k| \cdot \tau \Theta_i^n(t,x) + \Delta_x \Phi(u_i^n;k) \cdot h \overline{\Theta}_i^n(t,x).$$

Здесь Δ_t, Δ_x – разностные производные.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые вспомогательные соотношения. Введем следующие обозначения
$a \vee b = \max(a,b), a \wedge b = \min(a,b), \quad \Lambda(U) = S(T(U)).$

Тогда, на основании доказанных лемм,

$$\Lambda(U) \vee \Lambda(K) \le \Lambda(U \vee K), \Lambda(U) \wedge \Lambda(K) \ge \Lambda(U \wedge K), \Lambda(K) = K$$

для любой постоянной сеточной функции $K = (k, k, ..., k)$. Пусть

$$\widetilde{F}(U_i^n;k) = F_1(\Lambda(U_i^n \vee K)) + F_2(U_i^n \vee K) - (F_1(\Lambda(U_i^n \wedge K)) + F_2(U_i^n \wedge K)).$$

Покажем, что выполняется неравенство (см. [7])

$$\Delta_t |u_i^n - k| + \Delta_x \widetilde{F}(U_i^n;k) \le 0.$$

Действительно, так как $|a-b| = (a \vee b) - (a \wedge b)$, то

$$\frac{1}{\tau}\{[\Lambda(U)_i \vee k - \Lambda(U)_i \wedge k] - [(u_i \vee k) - (u_i \wedge k)]\} +$$

$$+\frac{1}{h}\{[F_1(\Lambda(U_{i+1}\vee K))-F_1(\Lambda(U_{i+1}\wedge K))]-[F_1(\Lambda(U_i\vee K))-F_1(\Lambda(U_i\wedge K))]+$$

$$+[F_2(U_{i+1}\vee K)-F_2(U_{i+1}\wedge K)]-[F_2(U_i\vee K)-F_2(U_i\wedge K)]\}=$$

$$=\frac{1}{\tau}\{[\Lambda(U)_i\vee k-\Lambda(U\vee K)_i]-[\Lambda(U)_i\wedge k-\Lambda(U\wedge K)_i]\}\le 0.$$

Тогда (22) можно переписать следующим образом

$$h^{u_\varepsilon,k}(t,x)\le\sum_{n=0}^{\infty}\sum_i \Delta_x\Phi(u_i^n;k)h\overline{\Theta}_i^n(t,x)-\Delta_x\widetilde{F}(U_i^n;k)\tau\Theta_i^n(t,x).$$

Или, учитывая что

$$\Phi(u_i^n;k)=\widetilde{F}(\widetilde{U}_i^n;k),$$

где $\widetilde{U}_i^n=(u_i^n,u_i^n,...,u_i^n)$,

$$h^{u_\varepsilon,k}(t,x)\le\sum_{n=0}^{\infty}\sum_i\{[\widetilde{F}(U_i^n;k)-\widetilde{F}(\widetilde{U}_i^n;k)](\overline{\Theta}_i^n-\overline{\Theta}_{i-1}^n)+$$

$$+[\widetilde{F}(U_{i+1}^n;k)-\widetilde{F}(U_i^n;k)](\overline{\Theta}_i^n-\sigma\cdot\Theta_i^n)\}.$$

Рассмотрим теперь гладкую функцию $\psi(t,x)$. Так как значение распределения $\overline{\Theta}_i^n-\sigma\cdot\Theta_i^n$ на этой функции равно, как легко проверить,

$$(\overline{\Theta}_i^n-\sigma\cdot\Theta_i^n)(\psi)=-\omega_\varepsilon(x_{i+1})\int_0^\tau\lambda\omega'_\varepsilon(t_n+\lambda)d\lambda+\sigma\omega_\varepsilon(t_{n+1})\int_0^h\lambda\omega'_\varepsilon(x_i+\lambda)d\lambda,$$

то

$$\begin{aligned}\left|(\overline{\Theta}_i^n-\sigma\cdot\Theta_i^n)(\psi)\right|&\le\tau^2\left|\omega_\varepsilon(x_{i+1})\right|\left|\int_0^1\right|\omega'_\varepsilon(t_n+\tau\lambda)\left|d\lambda+\right.\\&+\tau h\left|\omega_\varepsilon(t_{n+1})\right|\left|\int_0^1\right|\omega'_\varepsilon(x_i+h\lambda)\left|d\lambda.\right.\end{aligned}\tag{23}$$

Аналогично

$$\left|(\overline{\Theta}_i^n-\overline{\Theta}_{i-1}^n)(\psi)\right|\le\tau h\left|\omega_\varepsilon(t_n+\alpha)\right|\left|\int_0^1\right|\omega'_\varepsilon(x_i+h\lambda\left|d\lambda\right..\tag{24}$$

Заметим, что

$$\left|(a\vee c)-(b\vee c)\right|\le|a-b|,$$

$$\left|(a\wedge c)-(b\wedge c)\right|\le|a-b|.$$

Учитывая этот факт, оценки (18)-(20), а также Липшиц непрерывность $\widetilde{F}$ получаем

$$\sum_i \left| \widetilde{F}(\widetilde{U}_i^n;k) - \widetilde{F}(U_i^n;k) \right| \le C_1 \cdot Var\, u^0$$

$$\sum_i \left| \widetilde{F}(U_{i+1}^n;k) - \widetilde{F}(U_i^n;k) \right| \le C_2 \cdot Var\, u^0 .$$

Используя оценки (23) и (24), получаем требуемый результат.

На основании результатов [1] и доказанной теоремы, справедлива

Теорема 2. Пусть оператор P_τ задан соотношением (2) и метод S_τ определяется схемой (3)-(7). Пусть также $u_\tau = S_\tau P_\tau v_0$, где v – точное решение уравнения (1) в полупространстве $\{t \ge 0\} \times R$, равное v_0 при $t = 0$.

Тогда для всех $t > 0$

$$\| u_\tau(t) - v(t) \| \le (A_0 \tau + A_1 \sqrt{t\tau}) \cdot Var\, v_0 .$$

Литература

1. Н.Н. Кузнецов. Об устойчивых методах решения квазилинейного уравнения первого порядка в классе разрывных функций. ДАН СССР. 1975. 225, N 5. С. 1009-1012.

2. Н.Н. Кузнецов, С.А. Волошин Об устойчивости одного класса неявных конечно-разностных схем .ДАН СССР. 1978. 242. N 3. С. 525-528.

3. Волошин С.А. Об одном классе неявных конечно-разностных схем Ж. Вычисл. матем. и матем. физ. 1983. Т. 23. N 2. С. 347-354.

4. S.A. Voloshin. Stability of implicit schemes on nonuniform grids. Computational and Math. Modeling. Vol.7, N 2,1996,p254-257.

5. С.А. Волошин. О разностных аппроксимациях квазилинейных уравнений. Препринт, М., МАКС Пресс, 2004.

6. С.А. Волошин. О неявных конечно-разностных аппроксимациях квазилинейного закона сохранения. Препринт, М., МАКС Пресс, 2004.

7. M.G. Crandall and A. Majda. Monotone difference approximations for scalar conservation lavs. Math. Comp. 1980. 34,p 1-21.

8. R. Sanders. On convergence of monotone finite difference schemes with variable spatial differecing. Math. Comp. 1983. 40, N 161. p 91-106.

9. M.G. Crandal and L. Tartar. Some relations between nonexpansive and order preserving mappings. Proc. Amer. Math. Soc.,v.78, 1980.p 385-390.

10. Evans L. Application of nonlinear semigroup theory to certain partial differential equations. Nonlinear Evolution Equations.Academic Press, New York ,1978.

11. Crandall M.G. and Pazy A. On the range of accretive operators Jsrael J. Math. 1977. V. 27. N. 3-4.

12. Deimling K. Ordinary differential equations in Banach spaces. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, New York 1977.