

*А. А. Вороненко*

## **О ПОРОЖДЕНИИ ЛОЖНЫХ ОБРАЗОВ ЛИНЕЙНЫХ $k$ -ЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ**

Настоящая статья является продолжением работ [1, 2]. В этих статьях рассматривалась задача порождения линейных булевых функций. Напомним основные понятия. Будем говорить, что функция  $f$  порождает функцию  $g$  (при условии  $g \in K$ ), если можно предъявить множество точек  $X$  такое, что  $g(x)$  является единственной функцией, удовлетворяющей условию  $g \in K$ , и такой, что для любого  $x$  из множества  $X$  выполняется соотношение  $f(x) = g(x)$ . Если функция  $f$  порождает любую функцию  $g$  (при условии  $g \in K$ ), то  $f$  называется универсальной для класса  $K$ . Линейной называется  $k$ -значная функция  $f(x_1, \dots, x_n)$ , представимая в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = \alpha + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n,$$

где сложение и умножение производится по модулю  $k$ . В настоящей статье мы изучим универсальные функции для класса линейных  $k$ -значных функций. Основными вопросами при изучении универсальных функций являются существование и оценка минимального размера области определения.

*Л е м м а 1. Универсальная функция  $n$  переменных для класса линейных  $k$ -значных функций определена на не менее чем  $k(n+1)$  наборах.*

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Для того, чтобы задать все линейные функции – константы для каждой константы необходимо предъявить  $n+1$  набор, на котором функция равна этой константе.

Пусть задана функция  $\varphi(x_1, \dots, x_l)$ . Определим для произвольного  $t$  функцию  $\Phi(x_{11}, \dots, x_{1l}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{ml})$ . Положим  $\Phi(0, \dots, 0, x_{j1}, \dots, x_{jl}, 0, \dots, 0) = \varphi(x_{j1}, \dots, x_{jl})$  для всех  $j$  и будем считать  $\Phi(x_{11}, \dots, x_{1l}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{ml})$  не определенной на остальных наборах.

*Л е м м а 2. Если функция  $\varphi(x_1, \dots, x_l)$  универсальна для класса линейных  $k$ -значных функций  $l$  переменных, то для любого  $t$  функция  $\Phi(x_{11}, \dots, x_{1l}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{ml})$  является универсальной для класса линейных  $k$ -значных функций  $tl$  переменных.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Для произвольной линейной функции  $ml$  аргументов  $g$  на каждом из  $m$  подкубов размерности  $l$ , определяемых при фиксированном  $j = \overline{1, m}$  соотношениями  $x_{is} = 0$  для всех  $i \neq j$  и всех  $s$ , в силу универсальности функции  $\varphi(x_1, \dots, x_l)$  можно предъявить наборы, однозначно задающие коэффициенты при переменных  $x_{j1}, \dots, x_{jl}$  и свободный член.

Леммы 1 и 2 почти полностью идентичны соответствующим утверждениям работ [1, 2] для случая универсальных функций для класса линейных булевых функций. Однако для двух других вопросов – существования универсальных линейных функций для заданного числа переменных и требуемого количества наборов для построения универсальных функций при увеличении количества переменных на единицу, получаемые результаты значительно отличаются.

**Т е о р е м а 1.** Пусть  $f(x_1, \dots, x_n)$  – универсальная функция для класса линейных  $k$ -значных функций  $n$  переменных. Пусть  $k \geq 5$  и  $k$  – простое. Тогда для класса линейных  $k$ -значных функций  $n + 1$  переменных является универсальной частичная функция  $F(x_1, \dots, x_{n+1})$ , задаваемая соотношениями  $F(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$  и

$$\begin{aligned} F(0, 0, \dots, 0, x_{n+1}) &= 0, \\ F(1, 0, \dots, 0, x_{n+1}) &= x_{n+1}, \\ F(2, 0, \dots, 0, x_{n+1}) &= x_{n+1}^2, \\ F(3, 0, \dots, 0, x_{n+1}) &= x_{n+1}, \\ F(4, 0, \dots, 0, x_{n+1}) &= 0 \end{aligned}$$

для  $x_{n+1} \neq 0$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** При помощи значений  $F(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$  в силу универсальности  $f$  мы можем однозначно задать любой набор всех коэффициентов линейной функции  $n + 1$  аргумента, кроме  $\alpha_{n+1}$ .

Если  $\alpha$  и  $\alpha_1$  не равны нулю одновременно, то хотя бы одно из двух значений  $F(0, \dots, 0) = \alpha$  и  $F(4, 0, \dots, 0) = \alpha + 4\alpha_1$  отлично от нуля. Тогда уравнение

$$F(0, \dots, 0, x_{n+1}) = 0 \quad (F(4, 0, \dots, 0, x_{n+1}) = 0)$$

в предположении линейности  $F$  принимает вид

$$F(0, \dots, 0) + \alpha_{n+1}x_{n+1} = 0 \quad (F(4, 0, \dots, 0) + \alpha_{n+1}x_{n+1} = 0).$$

Для любого  $\alpha_{n+1} \neq 0$  имеется значение  $x_{n+1}$ , для которого  $\alpha_{n+1}$  будет единственным решением этого уравнения.

Если  $\alpha$  и  $\alpha_1$  не равны нулю одновременно, то хотя бы одно из двух значений  $F(1, 0, \dots, 0) = \alpha + \alpha_1$  и  $F(3, 0, \dots, 0) = \alpha + 3\alpha_1$  отлично от нуля. Тогда уравнение

$$F(1, 0, \dots, 0, x_{n+1}) = x_{n+1} \quad (F(3, 0, \dots, 0, x_{n+1}) = x_{n+1})$$

в предположении линейности  $F$  принимает вид

$$F(1, 0, \dots, 0) + \alpha_{n+1}x_{n+1} = x_{n+1} \quad (F(3, 0, \dots, 0) + \alpha_{n+1}x_{n+1} = x_{n+1})$$

и найдется значение  $x_{n+1}$  при котором  $\alpha_{n+1} = 0$  будет единственным решением этого уравнения.

Если  $\alpha = \alpha_1 = 0$ , то уравнение  $F(0, \dots, 0, x_{n+1}) = 0$  в предположении линейности  $F$  принимает вид  $\alpha_{n+1}x_{n+1} = 0$  и при любом  $x_{n+1} \neq 0$  имеет единственное решение  $\alpha_{n+1} = 0$ .

Если  $\alpha = \alpha_1 = 0$ , то уравнение  $F(2, 0, \dots, 0, x_{n+1}) = x_{n+1}^2$  в предположении линейности  $F$  принимает вид  $\alpha_{n+1}x_{n+1} = x_{n+1}^2$ , и его единственным решением для произвольного  $x_{n+1} \neq 0$  является  $\alpha_{n+1} = x_{n+1}$ .

Во всех случаях нам удалось задать требуемый коэффициент  $\alpha_{n+1}$ . Теорема доказана.

Нам потребовалось добавить значения на  $5k - 5$  наборах, чтобы увеличить размерность на единицу. Для булевых функций достаточно взять четыре набора [1]. Перейдем теперь к вопросу существования универсальных функций малого числа переменных (лемма 2 и теорема 1 позволяют увеличивать его произвольным образом).

Далее будем считать  $k$  простым не меньшим трех.

*З а м е ч а н и е 1. Прямой называется множество точек, удовлетворяющих уравнению  $ax + by + c = 0$ , где хотя бы один из коэффициентов  $a$  или  $b$  отличен от нуля. При этом полностью аналогично непрерывному случаю доказывается, что прямую, проходящую через точки  $A_1 = (x_1, y_1)$  и  $A_2(x_2, y_2)$ , можно задать параметрически*

$$(x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1)).$$

*З а м е ч а н и е 2. Если уравнение  $f(x_1, x_2) = g(x_1, x_2)$  для линейной функции  $g(x_1, x_2)$  имеет три решения, не лежащие на одной прямой, то определитель соответствующей системы на*

коэффициенты  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$  функции  $g(x_1, x_2)$  отличен от нуля. При этом система имеет единственное решение, и, следовательно,  $f(x_1, x_2)$  порождает  $g(x_1, x_2)$ . Поэтому, если  $f(x_1, x_2)$  не порождает  $g(x_1, x_2)$ , то либо уравнение  $f(x_1, x_2) = g(x_1, x_2)$  имеет не более двух решений, либо все они лежат на одной прямой.

Рассмотрим теперь функцию  $h(x_1, x_2)$ , определенную лишь на пяти прямых следующим образом

$$\begin{aligned} x_1 = 0 & \quad h(0, x_2) = 0, \\ x_1 = k - 1 & \quad h(k - 1, x_2) = x_2, \\ x_2 = 0 & \quad h(x_1, 0) = 0, \\ x_2 = 1 & \quad h(x_1, 1) = -x_1, \\ x_2 = k - 1 & \quad h(x_1, k - 1) = x_1. \end{aligned}$$

Уравнение  $h(x_1, x_2) = g(x_1, x_2)$  для линейной функции  $g(x_1, x_2) = \alpha + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$  на этих прямых приобретает вид

$$\begin{aligned} h(0, x_2) = 0 & = \alpha + \alpha_2 x_2 = g(0, x_2), \\ h(k - 1, x_2) = x_2 & = \alpha - \alpha_1 + \alpha_2 x_2 = g(k - 1, x_2), \\ h(x_1, 0) = 0 & = \alpha + \alpha_1 x_1 = g(x_1, 0), \\ h(x_1, 1) = -x_1 & = \alpha + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 = g(x_1, 1), \\ h(x_1, k - 1) = x_1 & = \alpha + \alpha_1 x_1 - \alpha_2 = g(x_1, k - 1). \end{aligned} \tag{1}$$

Данные уравнения являются линейными и для того, чтобы они не имели решений необходимо, чтобы соответственно выполнялись условия

$$\begin{aligned} \alpha_2 & = 0, \\ \alpha_2 & = 1, \\ \alpha_1 & = 0, \\ \alpha_1 & = -1, \\ \alpha_1 & = 1. \end{aligned}$$

Пара параллельных прямых  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = k - 1$  и тройка попарно параллельных прямых  $x_2 = 0$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_2 = k - 1$  пересекаются в шести точках:

$$A(0, 0), B(0, 1), C(0, k - 1), D(k - 1, 0), E(k - 1, 1), F(k - 1, k - 1).$$

Пять уравнений (1) могут иметь общие решения только в этих точках. Ниже описаны соответствующие условия на функцию  $g(x_1, x_2)$ .

- *A*. Равенство  $g(0, 0) = 0$  и условие  $\alpha = 0$ .
- *B*. Равенство  $g(0, 1) = 0$  и условие  $\alpha = -\alpha_2$ .
- *C*. Равенство  $g(0, k - 1) = 0$  и условие  $\alpha = \alpha_2$ .
- *D*. Равенство  $g(k - 1, 0) = 0$  и условие  $\alpha = \alpha_1$ .
- *E*. Равенство  $g(k - 1, 1) = 1$  и условие  $\alpha = 1 + \alpha_1 - \alpha_2$ .
- *F*. Равенство  $g(k - 1, k - 1) = k - 1$  и условие  $\alpha = -1 + \alpha_1 + \alpha_2$ .

В общем случае уравнения (1) имеют пять различных решений. Для того, чтобы их было не более двух, должно случиться три ситуации отсутствия решения или наличия общих решений. Заметим, что три условия отсутствия решений на параметр  $\alpha_1$  попарно несовместны, поэтому уравнение  $h(x_1, x_2) = g(x_1, x_2)$  всегда имеет не менее двух решений. Все возможные 18 вариантов приведены ниже. Кодом ситуации названо значение коэффициентов  $\alpha_1, \alpha_2$  и буквы, обозначающей точку из последнего списка.

**Таблица 1.**

Уравнения	Код	$g(x_1, x_2)$	Решения $h(x_1, x_2) = g(x_1, x_2)$
$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha - \alpha_1 + \alpha_2 = 1$	00E	1	$(1, k - 1), (k - 1, 1)$
$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha - \alpha_1 - \alpha_2 = -1$	00F	$k - 1$	$(1, 1), (k - 1, k - 1)$
$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha + \alpha_2 = 0$	01B	$-1 + x_2$	$(k - 2, k - 1), (0, 1)$
$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha - \alpha_2 = 0$	01C	$1 + x_2$	$(k - 2, 1), (0, k - 1)$
$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha - \alpha_1 = 0$	10D	$1 + x_1$	$(\frac{k-1}{2}, 1), (k - 1, 0)$
$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha - \alpha_1 + \alpha_2 = 1$	10E	$2 + x_1$	$(k - 2, 0), (k - 1, 1)$
$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha = 0$	11A	$x_1 + x_2$	$(\frac{k-1}{2}, 1), (0, 0)$
$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha + \alpha_2 = 0$	11B	$-1 + x_1 + x_2$	$(1, 0), (0, 1)$
$\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 0, \alpha - \alpha_1 = 0$	-10D	$-1 - x_1$	$(\frac{k-1}{2}, k - 1), (k - 1, 0)$
$\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 0, \alpha - \alpha_1 - \alpha_2 = -1$	-10F	$-2 - x_1$	$(k - 2, 0), (k - 1, k - 1)$
$\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1, \alpha = 0$	-11A	$-x_1 + x_2$	$(\frac{k-1}{2}, k - 1), (0, 0)$
$\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1, \alpha - \alpha_2 = 0$	-11C	$1 - x_1 + x_2$	$(1, 0), (0, k - 1)$
$\alpha_1 = 0, \alpha + \alpha_2 = 0, \alpha - \alpha_1 - \alpha_2 = -1$	0BF	$\frac{k-1}{2} + \frac{k+1}{2}x_2$	$(0, 1), (k - 1, k - 1)$
$\alpha_1 = 0, \alpha - \alpha_2 = 0, \alpha - \alpha_1 + \alpha_2 = 1$	0CE	$\frac{k+1}{2} + \frac{k+1}{2}x_2$	$(0, k - 1), (k - 1, 1)$
$\alpha_1 = -1, \alpha = 0, \alpha - \alpha_1 - \alpha_2 = -1$	-1AF	$-x_1 + x_2$	$(0, 0), (k - 1, k - 1)$
$\alpha_1 = -1, \alpha - \alpha_2 = 0, \alpha - \alpha_1 = 0$	-1CD	$-1 - x_1 - x_2$	$(0, k - 1), (k - 1, 0)$
$\alpha_1 = 1, \alpha = 0, \alpha - \alpha_1 + \alpha_2 = 1$	1AE	$x_1 + 2x_2$	$(0, 0), (k - 1, 1)$
$\alpha_1 = 1, \alpha + \alpha_2 = 0, \alpha - \alpha_1 = 0$	1BD	$1 + x_1 - x_2$	$(0, 1), (k - 1, 0)$

*Л е м м а 3. Пусть  $k$  – простое и  $k \geq 7$ . Тогда функцию  $h(x_1, x_2)$  можно доопределить в не более чем восемнадцати точках так, чтобы она породила все функции таблицы 1.*

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Ни одна из прямых, проходящих через решения уравнения  $h(x_1, x_2) = g(x_1, x_2)$  для функций таблицы 1, не является ни горизонтальной, ни вертикальной. Поэтому на прямоугольнике области неопределенности функции  $h(x_1, x_2)$  можно каждом столбце последовательно доопределять по одной точке, кроме последней. Размер прямоугольника  $(k-2) \times (k-3)$ . Если  $k \geq 11$ , то  $(k-3)^2 \geq 18$  – и точек хватит. При  $k = 7$  имеем  $(k-3)^2 = 16$ , но доопределив  $h(5, 5) = 1$ , мы сможем породить сразу три функции таблицы:  $1, 1 - x_1 + x_2, 1 + x_1 - x_2$  и при помощи возможности породить по одной функции доопределением в одной точке породить оставшиеся 15 функций. Лемма доказана.

Нам остается разобраться с гипотетической ситуацией, когда уравнение  $h(x_1, x_2) = g(x_1, x_2)$  имеет три и более решения, но при этом все они лежат на одной прямой.

Непосредственно проверяется

*Л е м м а 4. Пусть уравнение  $h(x_1, x_2) = g(x_1, x_2)$  имеет не менее трех решений на одной из прямых  $x_1 = 0, x_1 = k - 1, x_2 = 0, x_2 = 1, x_2 = k - 1$ . Тогда есть решения данного уравнения и вне этой прямой.*

Если ни один из трех коэффициентов  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$  не равен нулю, то уравнение  $h(x_1, x_2) = g(x_1, x_2)$  при наличии не менее трех решений имеет по крайней мере два из них таких, что  $h = g = 0$ , и одно такое, что  $h = g \neq 0$ . Эти решения не могут лежать на одной прямой. Осталось рассмотреть три случая:

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) &= \alpha + \alpha_1 x_1, \\ g(x_1, x_2) &= \alpha + \alpha_2 x_2, \\ g(x_1, x_2) &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2. \end{aligned}$$

*Л е м м а 5. Если ровно один из трех коэффициентов  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$  не равен нулю, и уравнение  $h(x_1, x_2) = g(x_1, x_2)$  имеет три решения, то среди них есть не лежащие на одной прямой.*

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Для коэффициента  $\alpha_1$  или  $\alpha_2$ , отличного от нуля, это следует из леммы 4. Рассмотрим функции  $g(x_1, x_2) = \alpha$ , где  $\alpha \in \{2, \dots, k-2\}$ . Решениями уравнения

$h(x_1, x_2) = g(x_1, x_2)$  являются точки  $(\alpha, k - 1)$ ,  $(k - 1, \alpha)$  и  $(-\alpha, 1)$ . Прямая  $x_1 + x_2 = \alpha - 1$ , проходящая через первые две точки, пересекает прямую  $x_2 = 1$  в точке  $(\alpha - 2, 1)$ . Уравнение  $\alpha - 2 = -\alpha$  имеет единственное решение  $\alpha = 1$ .

Ниже приведена таблица решений уравнения  $h(x_1, x_2) = g(x_1, x_2)$ .

**Таблица 2.**

$g(x_1, x_2) =$	$= \alpha + \alpha_1 x_1$	$= \alpha + \alpha_2 x_2$	$= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$
$x_1 = 0$	--	$(0, \frac{-\alpha}{\alpha_2})$	$(0, 0)$
$x_1 = k - 1$	$(k - 1, \alpha - \alpha_1)$	$(k - 1, \frac{-\alpha}{\alpha_2 - 1})$	$(k - 1, \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - 1})$
$x_2 = 0$	$(\frac{-\alpha}{\alpha_1}, 0)$	--	$(0, 0)$
$x_2 = 1$	$(\frac{-\alpha}{\alpha_1 + 1}, 1)$	$(-\alpha - \alpha_2, 1)$	$(\frac{-\alpha_2}{\alpha_1 + 1}, 1)$
$x_2 = k - 1$	$(\frac{-\alpha}{\alpha_1 - 1}, k - 1)$	$(\alpha - \alpha_2, k - 1)$	$(\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - 1}, k - 1)$

Из наличия трех точек  $(\frac{-\alpha}{\alpha_1}, 0)$ ,  $(\frac{-\alpha}{\alpha_1 + 1}, 1)$  и  $(\frac{-\alpha}{\alpha_1 - 1}, k - 1)$  на одной прямой сразу получим противоречивое соотношение  $\frac{-\alpha}{\alpha_1 + 1} + \frac{-\alpha}{\alpha_1 - 1} = 2\frac{-\alpha}{\alpha_1}$ . Из наличия трех точек  $(0, 0)$ ,  $(\frac{-\alpha_2}{\alpha_1 + 1}, 1)$  и  $(\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - 1}, k - 1)$  на одной прямой получим противоречивое соотношение  $\frac{-\alpha_2}{\alpha_1 + 1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - 1} = 0$ . При этом возникает необходимое дополнительное условие  $\alpha_1 \in \{-1, 1\}$ . Точка  $(0, \frac{-\alpha}{\alpha_2})$  лежит на прямой, проходящей через точки  $(-\alpha - \alpha_2, 1)$  и  $(\alpha - \alpha_2, k - 1)$  лишь при условии  $\alpha = \alpha_2$ . В этом случае две точки совпадут с  $(0, k - 1)$ , а при  $\alpha_2 = 1$  точки  $(k - 1, \frac{-\alpha}{\alpha_2 - 1})$  уже не будет. Рассмотрим таблицу 2 с учетом полученных условий.

**Таблица 3.**

	$\alpha + x_1$	$\alpha - x_1$	$\alpha + \alpha x_2$	$x_1 + \alpha_2 x_2$	$-x_1 + \alpha_2 x_2$
$x_1 = 0$	--	--	$(0, k - 1)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
$x_1 = k - 1$	$(k - 1, \alpha - 1)$	$(k - 1, \alpha + 1)$	$(k - 1, \frac{-\alpha}{\alpha - 1})$	$(k - 1, \frac{1}{\alpha_2 - 1})$	$(k - 1, \frac{-1}{\alpha_2 - 1})$
$x_2 = 0$	$(-\alpha, 0)$	$(\alpha, 0)$	--	$(0, 0)$	$(0, 0)$
$x_2 = 1$	$(\frac{-\alpha}{2}, 1)$	--	$(-2\alpha, 1)$	$(\frac{-\alpha_2}{2}, 1)$	--
$x_2 = k - 1$	--	$(\frac{\alpha}{2}, k - 1)$	$(0, k - 1)$	--	$(\frac{-\alpha_2}{2}, k - 1)$

Легко проверить, что все случаи, когда точки таблицы 3 лежат на одной прямой, соответствуют совпадению пары из них и, соответственно, функции  $g(x_1, x_2)$  и некоторой функции таблицы 1.

**Т е о р е м а 2.** Пусть  $k$  – простое и  $k \geq 7$ . Тогда существует универсальная функция двух переменных для класса линейных  $k$ -значных, определенная на не более чем  $5k + 12$  наборах.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Функция  $h(x_1, x_2)$  порождает все линейные функции, кроме восемнадцати из таблицы 1. Эти функции порождаются по лемме 3.

**Т е о р е м а 3.** Пусть  $k$  – простое и  $k \geq 7$ . Тогда для четных  $n$  существует универсальная функция  $n$  переменных для класса линейных  $k$ -значных, определенная на  $2.5kn + 5.5n + 1$  наборах. Для нечетных  $n$  существует универсальная функция  $n$  переменных для класса линейных  $k$ -значных, определенная на  $2.5kn + 5.5n + 2.5k - 9.5$  наборах.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Первое утверждение следует из теоремы 2 и леммы 2. Для доказательства второго следует применить еще и теорему 1.

Полученный результат в 2.5 раза больше нижней оценки леммы 1. Для булевых функций [2] соответствующее отношение сейчас равняется  $3\frac{1}{7}$  к 2. В булевом случае универсальные функции существуют, начиная с четырех переменных. Мы показали существование универсальных функций двух переменных для всех простых  $k$ , начиная с семи.

Задача выяснения минимального количества переменных универсальных функций для класса линейных при  $k = 3$  и  $k = 5$  решается перебором. Существенно сложнее задача нахождения универсальных функций для класса линейных при составных  $k$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вороненко А. А. Об универсальных частичных функциях для класса линейных функций // Дискретная математика. 2012. **24**. № 3. С. 62–65.
2. Вороненко А. А., Кафтан Д. В. О порождении ложных образов линейных булевых функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2014. № 4. С. 70–73.