А.А. Вороненко

РАСПОЗНАВАНИЕ БЕСПОВТОРНОСТИ В ПРОИЗВОЛЬНОМ БАЗИСЕ[1]

Настоящая работа посвящена решению задачи о распознавании свойства бесповторности (представимости формулами в некотором базисе без кратного вхождения переменных). Везде далее функции считаются булевыми, а базис наследственным (содержащим вместе с функцией все получающиеся из нее подстановкой констант). Входная информация о функции представляется в виде вектор-столбца, распознавание производится схемами из функциональных элементов в произвольном конечном базисе (удобно представлять себе, что это базис всех двухвходовых элементов). Основной результат формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Для любого конечного наследственного базиса B существует последовательность схем $\{S_n\}$, распознающих бесповторность в базисе B булевых функций n переменных, заданных векторно, сложности $O(2^n)$.*

Для распознавания мы применим технику, обоснованную в работе [1].

Теорема 2. (Теорема 1 (основная) в [1]). *Пусть F – произвольный класс булевых функций, замкнутый относительно подстановки констант на место переменных, и пусть существуют кодирование функций, принадлежащих F, и последовательность схем $\{\Sigma_m\}$, обладающие следующими свойствами:*

1. *кодом константы является она сама;*
2. *если на вход произвольной схемы Σ_m подать коды подфункций $f(x_1, \ldots, x_{m-1}, 0)$ и $f(x_1, \ldots, x_{m-1}, 1)$, принадлежащих F, то схема Σ_m распознает принадлежность функции $f(x_1, \ldots, x_m)$ классу F;*
3. *если функция $f(x_1, \ldots, x_m)$ принадлежит классу F, то выход схемы Σ_m содержит код функции $f(x_1, \ldots, x_m)$;*
4. *сложность схемы Σ_m не превосходит $\beta(m)$.*

---

[1]Работа выпонена при поддержке РФФИ (коды проектов 04-01-00359, 06-01-00438, 06-01-00745)

Тогда существует схема S_n, распознающая принадлежность классу F произвольной функции n переменных, заданной векторно, сложности не более

$$(2^n - 2)L(x_1 \& x_2) + \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} \cdot \beta(k),$$

где $L(x_1 \& x_2)$ – сложность реализации конъюнкции двух переменных.

Следствие. *Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta(k)}{2^k}$ сходится, то принадлежность классу F распознается с линейной сложностью относительно 2^n – длины вектор-столбца булевой функции.*

В частности, это справедливо, когда $\beta(k)$ растет как полином.

Для получения нашего результата мы будем действовать по следующему плану. Сначала мы получим полиномиальное по длине относительно n представление бесповторных в произвольном наследственном базисе функций. После этого достаточно построить машину с произвольным доступом, за полиномиальное относительно длины кода бесповторных подфункций $f_0 = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ и $f_1 = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)$ время проверяющую $f(x_1, \ldots, x_n)$ на бесповторность и строящую код функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ в случае ее бесповторности, чтобы утверждать, что задача распознавания бесповторности имеет линейную сложность. Последнее следует из полиномиальной сводимости вычислений на машине с произвольным доступом к вычислениям на машине Тьюринга и теоремы Сэвиджа [2].

Введем обозначения и определения. Через B_l обозначим базис всех функций l переменных. Бесповторные в B_l функции будем называть l-бесповторными. Функции, бесповторные в B_2, будем просто называть бесповторными. Вместо формульного представления бесповторных функций можно рассматривать древесное, в котором листья помечены переменными, а внутренние вершины – соответствующими функциональными символами. Фактически это является схемой из функциональных элементов, поэтому мы будем без дополнительных оговорок использовать терминологию, принятую для схем [3]. Представление в виде деревьев используется для того, чтобы удобнее выделить некоторый единственный (канонический) вид дерева или же некоторое достаточно небольшое множество "правильных" деревьев, соответствующих бесповторным в нашем базисе функциям.

Важными являются понятия однотипных и обобщенно-однотипных функций. Функции $\phi(x_1, \ldots, x_r)$ и $\psi(y_1, \ldots, y_r)$ называются однотипными, если существуют такие $\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_r$, что выполняется соотношение

$$\phi(x_1, \ldots, x_r) = \psi^\sigma(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_r^{\sigma_r}).$$

Функции $\phi(x_1, \ldots, x_r)$ и $\psi(y_1, \ldots, y_r)$ называются обобщенно-однотипными, если существуют такие $\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_r$ и перестановка $(i_1, \ldots, i_r)$ на множестве $\{1, \ldots, r\}$, что выполняется соотношение

$$\phi(x_1, \ldots, x_r) = \psi^\sigma(x_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{i_r}^{\sigma_r}).$$

Заметим, что однотипные функции являются обобщенно-однотипными. Одним из основных утверждений, позволяющих решать различные задачи именно для булевых функций, является лемма о бесповторной суперпозиции.

Лемма 1. (см. напр. [4]). Пусть функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(y_1, \ldots, y_m)$ существенно зависят от всех переменных. Тогда и функция $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(y_1, \ldots, y_m))$ существенно зависит от всех переменных.

Далее, если это не будет оговорено специальным образом, мы будем рассматривать базис B_l для некоторого произвольного фиксированного l. Функция s переменных ($s \geq 3$) называется собственной (или s-собственной), если она не является $s-1$ – бесповторной.

Дерево называется правильным, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. отрицания могут быть лишь вершинами, смежными с листьями;
2. внутренние вершины помечены одним из следующих символов: $\&, \vee, \oplus, \overline{\oplus}$ (вершины любой степени захода, которым соответствует конъюнкция, дизъюнкция, сумма по модулю 2 или ее отрицание) или символами, соответствующими s-собственным функциям (только для вершин степени захода s);
3. смежные вершины не могут быть помечены одинаковыми символами из множества $\{\&, \vee, \oplus, \overline{\oplus}\}$, а также символами $\oplus$ и $\overline{\oplus}$ одновременно.

Считается, что корень правильного дерева расположен внизу. Для заданной функции можно построить правильное дерево из произвольного дерева, реализующего функцию, при помощи следующих преобразований формул: замены функций трех и более переменных, не являющихся собственными на их разложения, замены отрицания s-собственной функции на одну функцию, замены функций двух переменных, не входящих в множество $\{\&, \vee, \oplus, \overline{\oplus}\}$, правил де Моргана и склейки соседних вершин, помеченных некоторыми парами из символов $\{\&, \vee, \oplus, \overline{\oplus}\}$.

Для заданного правильного дерева s переменных называются равноудаленными, если существует некая вершина v, для которой все переменные оказываются в разных ее поддеревьях, и эта вершина либо имеет степень захода s, либо помечена символом из множества $\{\&, \vee, \oplus, \overline{\oplus}\}$.

При подстановке констант на место переменных в поддеревьях порядок оставшихся переменных наследуется естественным образом: переменные i-го поддерева предшествуют переменным $i+1$-го.

Лемма 2. Для произвольных равноудаленных переменных можно фиксировать значения оставшихся переменных так, чтобы остаточная функция существенно зависела от всех переменных. При этом все такие остаточные функции будут однотипны.

Доказательство. Пусть равноудалены переменные $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$. Если подставить константы на место остальных переменных так, чтобы эти оставались существенными (а это можно сделать по лемме 1), то в s вершинах над последней общей реализуются функции $x_{i_1}^{\sigma_{i_1}}, \ldots, x_{i_s}^{\sigma_{i_s}}$. Если в последней общей вершине реализуется s-собственная функция ϕ, то при этой константной подстановке в вершине получается $\phi(x_{i_1}^{\sigma_{i_1}}, \ldots, x_{i_s}^{\sigma_{i_s}})$. В корне при этом реализуется эта же функция или ее отрицание. Случай, когда в последней общей вершине одна из функций $\{\&, \vee, \oplus, \overline{\oplus}\}$, рассматривается полностью аналогично. Лемма доказана.

Пусть теперь рассматриваются бесповторные функции в базисе B_l. Для заданной l-бесповторной функции f и заданной r-местной ($r \leq l$) функции ϕ определим гиперграф G_ϕ^f. Вершинами гиперграфа являются переменные функции f. Упорядоченная r-ка является ребром графа G_ϕ^f тогда и только тогда, когда существует остаточная подфункция функции f, существенно зависящая от соответствующих r переменных и однотипная с ϕ.

Гиперграф G с r-вершинными ребрами назовем связно-раскрашиваемым, если существует раскраска его вершин в r цветов $\{1, \ldots, r\}$ такая, что в любой из цветов покрашена хотя бы одна вершина и любой упорядоченный набор r вершин, соответственно раскрашенных в цвета $\{1, \ldots, r\}$, принадлежит множеству ребер гиперграфа G. Соответствующая раскраска называется хорошей.

Лемма 3. Если для заданной функции f существует правильное дерево, в корне которого лежит функция, однотипная с ϕ, то гиперграф G_ϕ^f связно-раскрашиваем.

Доказательство. Пусть однотипная с ϕ функция лежит в корне. Раскрасим висячие вершины в r цветов – каждое корневое поддерево в свой цвет. По лемме 1 мы можем фиксировать значения переменных поддеревьев так, что на выходе корневого поддерева реализуется либо произвольная переменная, либо ее отрицание. При этом в корне реализуется функция, однотипная с ϕ, а гиперграф G_ϕ^f связно-раскрашиваем по определению. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть для заданной функции f существует дерево, в корне которого лежит не являющаяся обобщенно-однотипной с r-собственной функцией ϕ функция s аргументов θ, причем $s \leq r$. Тогда гиперграф G_ϕ^f не связно-раскрашиваем.

Доказательство. Пусть в корне лежит не являющаяся обобщенно-однотипной с ϕ функция θ. Тогда реализуемая функция имеет вид $\theta(f_1(\mathbf{x}^1), \dots, f_s(\mathbf{x}^s))$. Если произвольные r переменных не принадлежат одному множеству $\mathbf{x}^\mathbf{j}$, то при $s < r$ любая зависящая от них остаточная функция не является s-собственной, а, следовательно, не является обобщенно-однотипной с ϕ. Если $s = r$ и не все переменные лежат в различных поддеревьях, то любая их остаточная функция не является s-собственной, а, следовательно, не является обобщенно-однотипной с ϕ. Если же $s = r$, а все переменные лежат в разных корневых поддеревьях, то по лемме 2 любая реализуемая подфункция этих переменных однотипна с θ и, следовательно, не является обобщенно-однотипной с ϕ. Таким образом, для произвольного ребра гиперграфа G_ϕ^f все его вершины принадлежат одному из множеств $\mathbf{x}^\mathbf{j}$. Пусть существует хорошая раскраска графа G_ϕ^f в r цветов. Так как $r > 1$, найдутся две вершины из разных множеств $\mathbf{x}^\mathbf{j}$, окрашенные в разные цвета. Добавим к ним $r - 2$ вершины остальных цветов и получим (по определению хорошей раскраски) ребро гиперграфа G_ϕ^f, не все вершины которого лежат в одном $\mathbf{x}^\mathbf{j}$. Противоречие. Следовательно (от противного), G_ϕ^f не связно-раскрашиваем. Лемма доказана.

Замечание 1. Случай отличия функций $\vee, \&$ в корне от $\oplus, \overline{\oplus}$ рассматривался в работе [5].

Следствие 1. Хорошей является только раскраска всех вершин каждого корневого поддерева в один цвет, свой для поддерева.

Доказательство. Пусть правильное дерево реализует функцию $\phi(f_1(\mathbf{x}^1), \ldots, f_r(\mathbf{x}^r))$. Рассмотрим произвольную хорошую раскраску и произвольные r вершин, имеющие при данной раскраске попарно различные цвета. Так как упорядоченный набор этих вершин образует ребро гиперграфа G_ϕ^f, все эти вершины лежат либо в одном множестве $\mathbf{x}^\mathbf{j}$, либо в попарно различных множествах. В первом случае в отличном от $\mathbf{x}^\mathbf{j}$ множестве можно выбрать произвольную вершину и заменить на нее вершину равного с ней цвета. Полученный набор вершин окрашен в r цветов, но не является ребром гиперграфа G_ϕ^f. Во втором случае отличие от раскраски по поддеревьям означает наличие двух вершин разных цветов в одном поддереве. Добавив к ним $r-2$ вершины оставшихся цветов из числа рассматриваемых r вершин, вновь получим набор, не являющийся ребром гиперграфа G_ϕ^f. Следствие доказано.

Следствие 2. Две различные раскраски ψ_1 и ψ_2 являются хорошими для гиперграфа G_ϕ^f тогда и только тогда, когда на множестве цветов $\{1, \ldots, r\}$ существует перестановка π такая, что $\psi_2(x_i) = \pi(\psi_1(x_i))$ для любого i и при этом для некоторых $\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_r$ выполнено соотношение

$$\phi(x_1, \ldots, x_r) = \phi^\sigma(x_{\pi(1)}^{\sigma_1}, \ldots, x_{\pi(r)}^{\sigma_r})). \tag{1}$$

Доказательство. В силу следствия 1 хорошие раскраски могут быть получены друг из друга перестановкой цветов. Аргументы из различных поддеревьев равноудалены, все реализуемые в корне остаточные функции этих аргументов по лемме 2 однотипны. Последнее означает однотипность $\phi(x_1, \ldots, x_r)$ и $\phi(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(r)}))$ для искомой перестановки π. Следствие доказано.

Мы будем пользоваться следующим утверждением.

Лемма 5. (О разложении.) (см. напр. [6]) Представление $f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = h(g(\mathbf{v}), \mathbf{w})$ справедливо тогда и только тогда, когда среди всех остаточных функций $f(\mathbf{v}, \alpha)$ имеется не более двух, отличных от констант. При этом, если таких подфункций две, то они являются отрицаниями друг друга.

Определения. Рассмотрим два правильных дерева, реализующих две функции (необязательно различные, необязательно зависящие от совпадающих множеств переменных). Пары вершин, взятых в различных деревьях, назовем белыми (черными), если реализуемые в них подфункции совпадают (являются отрицаниями друг друга). Вершина одного из деревьев называется зеленой, если все переменные реализуемой в ней подфункции являются фиктивными для функции, реализуемой в корне другого дерева. Наконец, пара вершин называется серой (темно-серой), если все их входы, кроме одной пары, являются белыми или черными, и заменой этой пары входов на одинаковые переменные или переменную и отрицание можно получить равные функции (функции, являющиеся отрицаниями друг друга). Пары вершин, помеченных одним из символов $\{\&, \vee, \oplus, \overline{\oplus}\}$, называются частично белыми (частично черными), если можно выделить поддеревья с корнями – этими вершинами со степенью корня не менее двух, которые реализуют равные подфункции (подфункцию и отрицание). Вершины, помеченные одним из символов $\{\&, \vee, \oplus, \overline{\oplus}\}$, называются частично зелеными, если поддерево с корнем – этой вершиной, имеет не менее двух зеленых вершин, смежных с корнем.

Теорема 3. (О негативности). Пусть D_1 и D_2 – правильные деревья, реализующие l-бесповторную функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда все вершины являются либо попарно белыми, либо попарно черными.

Доказательство. Корни являются белыми вершинами. По следствию 2 из леммы 4 однозначно восстанавливаются множества переменных в корневых поддеревьях с точностью до перестановок поддеревьев по соотношениям (1). Все переменные являются существенными по лемме 1 и по лемме о разложении функции, реализуемые в вершинах, смежных с корнем, могут быть либо попарно равными, либо отрицаниями друг друга. Повторяя рассуждения для поддеревьев, получим утверждение теоремы.

Справедливы следующие утверждения о транзитивности цветов.

Утверждения. (О трех цветах). Рассмотрим три вершины A, B, C на трех правильных деревьях. Тогда отношения на двух парах вершин A и B и B и C порождают отношения на третьей (названия цветов сокращены до первых букв).

$A \leftrightarrow B$	$B \leftrightarrow C$	$A \leftrightarrow C$
б	б	б
б	ч	ч
ч	ч	б
с	б	с
с	ч	т-с
т-с	б	т-с
т-с	ч	с

Отдельно отметим, что вершина дерева A, зеленая относительно дерева B, является зеленой и относительно дерева C, реализующего с B

равную функцию, или отрицание функции, реализуемой .

Следующим важным понятием является таблица существенности. Таблица существенности l-бесповторной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ содержит три столбца и $\binom{n}{l}$ строк. В первом столбце каждой строки содержится свой набор переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}$. Во втором столбце содержится набор $n - l$ констант α_j для $j \notin \{i_1, \ldots, i_l\}$. В третьем столбце содержится подфункция, получаемая из $f(x_1, \ldots, x_n)$ подстановкой констант α и существенно зависящая от всех своих переменных. Выбор констант из второго столбца определяется при этом произвольным образом. Если же такой выбор невозможен, то второй и третий столбцы содержат прочерки.

Хребтом бесповторной функции назовем правильное дерево, из которого можно получить правильное дерево для функции, навешиванием отрицаний на функции, реализуемые в некоторых вершинах.

Теорема 4. По таблице существенности l-бесповторной функции f можно получить некоторый ее хребет.

Доказательство. Применим следующий алгоритм. Вначале из всех множеств попарно обобщенно-однотипных собственных бесповторных функций выберем по одному представителю. Для всех таких представителей θ положим все гиперграфы $\tilde{G}_\theta$ пустыми. После этого для каждой непустой строки таблицы существенности и для каждой подстановки констант на место части из l переменных соответствующей функции добавим соответствующее гиперребро к соответствующему гиперграфу $\tilde{G}_\theta$, если получаемая остаточная функция однотипна с θ. Гиперграф $\tilde{G}_\theta$ является подгиперграфом гиперграфа G_θ^f. Поэтому по леммам 3 и 4 функция, однотипная с функцией θ максимальной арности, для которой гиперграф $\tilde{G}_\theta$ связно-раскрашиваем, лежит в корне правильного дерева любой бесповторной функции с данной таблицей существенности. Если функция $\phi(y_1, \ldots, y_r)$ лежит в корне правильного дерева для функции f, то для любых переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$, лежащих, соответственно, в поддеревьях $1, \ldots, r$, остаточная существенная функция по лемме 2 однотипна с $\phi(y_1, \ldots, y_r)$. Поэтому соответствующий гиперграф $\tilde{G}_\phi$ будет связно-раскрашиваемым. По следствию 2 из леммы 4 этот гиперграф однозначно определяет аргументы поддеревьев. Далее алгоритм применяется к подтаблицам таблицы существенности, соответствующим переменным одного поддерева. Заметим, что внешние переменные могут лишь изменять подфункцию поддерева на отрицание. Доведя процесс до листьев, получим хребет функции. Теорема доказана.

Замечание 2. Последняя теорема и теорема о негативности содержат в себе некий эквивалент теоремы А.В.Кузнецова (см. напр. [6]) о конечной полной системе тождеств для бесповторных формул. Рассуждения, приводимые в настоящей работе, носят тестовый характер. Для некоторых базисов (например B_2, B_3, см. [5,7]) удается добавить дополнительные ограничения к требованиям 1)– 3) для правильного дерева так, чтобы представление было единственным. Такие деревья называются каноническими, а их наличие позволяет полностью решить как проблему канонического представления, так и проблему эквивалентных преобразований. Кроме того, с помощью канонических деревьев можно решать задачи тестирования бесповторных функций [5,7,8,9].

Сейчас мы докажем несколько результатов, связанных с тестированием бесповторных функций.

Булева функция называется существенной, если имеет не менее двух существенных переменных. Существенная переменная булевой функции называется слабой, если ее можно заменить на константу так, что все оставшиеся переменные по-прежнему будут существенными.

Лемма 6. Любая существенная булева функция имеет не менее двух слабых переменных.

Доказательство. Существенную переменную, не являющуюся слабой, назовем сильной. Пусть x – сильная переменная функции f. Тогда справедливо разложение

$$f(x, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) = \overline{x} f_0(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \vee x f_1(\mathbf{y}, \mathbf{w}), \tag{2}$$

где множества $\mathbf{z}$ и $\mathbf{w}$ непусты. Докажем от противного, что каждое из этих множеств содержит слабую переменную для f. Предположим, что слабых переменных нет в $\mathbf{z}$. Тогда $\mathbf{z}$ содержит сильную переменную t, константная замена которой в силу (2) не может сделать фиктивной ни переменную множества $\mathbf{y}$, ни переменную множества $\mathbf{w}$, ни x. Из этого следует, что множество $\mathbf{z}$ содержит не менее двух переменных, а переменная t является сильной для f_0. Применим разложение (2) по переменной t к функции f_0 и повторим рассуждения для 0-компоненты получаемой функции. На s-том шаге получим разложение

$$\begin{gathered} f(\mathbf{x}) = \overline{z_1 z_2} \ldots \overline{z_s} f_0^{(s)}(\mathbf{u}^{s-1}, \mathbf{y}^s) \vee \\ \vee \overline{z_1 z_2} \ldots z_s f_1^{(s)}(\mathbf{u}^{s-1}, \mathbf{w}^{s-1}) \vee \overline{z_1 z_2} \ldots z_{s-1} f_1^{(s-1)}(\mathbf{u}^{s-2}, \mathbf{w}^{s-2}) \vee \ldots \\ \ldots \vee z_1 f_1^{(1)}(\mathbf{u}^0, \mathbf{w}^0). \end{gathered}$$

В последнем разложении множества $\mathbf{w}^i$ не пересекаются и не пусты. Множества $\mathbf{u}^{i-1}$ являются собственными подмножествами множеств $\mathbf{u}^i$, причем для $f_1^{(i+1)}$ из переменных $\mathbf{u}$ существенными обязаны быть лишь переменные из $\mathbf{u}^i \backslash \mathbf{u}^{i-1}$. Множество $\mathbf{u}^i \backslash \mathbf{u}^{i-1}$ может быть пустым. Для какого-то s множество $\mathbf{y}^s$ будет состоять из одной переменной, которая будет слабой для f, что противоречит пустоте множества $\mathbf{z}$. Лемма доказана.

Лемма 7. Для любой булевой функции и любой ее существенной переменной можно забить константами произвольное количество отличных от нее переменных так, что все переменные полученной остаточной функции будут существенными.

Доказательство. Вытекает из предыдущей леммы. Для любой существенной переменной функции найдется отличная от нее слабая переменная, которую можно забить константой. Проделав эту операцию нужное число раз, получим утверждение леммы.

Лемма 8. Таблица существенности бесповторной функции и произвольный ее хребет однозначно определяют бесповторную функцию.

Доказательство практически полностью повторяет доказательство аналогичного утверждения для B_2 из работы [5]. Рассмотрим произвольную вершину v. Пусть нам известны с точностью до отрицания подфункции, реализуемые во всех вершинах над некоторой вершиной v правильного дерева функции. Пусть вершина v помечена произвольной r-местной функцией ψ. Рассмотрим подгиперграф гиперграфа G_ψ^f, порожденный листьями над v. Рассмотрим произвольные равноудаленные от v переменные $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$. В силу леммы 7 мы можем добиться того, l-местная подфункция функции f, существенно зависящая от всех своих аргументов, зависит в том числе от переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$. Последнее доказывает наличие соответствующего гиперребра в гиперграфе G_ψ^f. Таким образом, таблица существенности позволяет восстановить с точностью до отрицания функцию, реализуемую в вершине v. Переменные известны изначально. Мы можем восстановить с точностью до отрицания функцию в корне, точное значение которой после этого определяется значением функции в произвольной точке. Лемма доказана.

Пусть булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависит от всех переменных. Пусть G_f – граф с множеством вершин – множеством переменных функции f и ребрами между теми и только теми вершинами x_i и x_j, для которых существует множество констант α таких, что функция $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{j-1}, x_j, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n)$ существенно зависит от обеих переменных.

Лемма 9. (О связной существенности). Граф G_f связен.

Доказательство. Для начала докажем, что для любой переменной x_i в графе G_f есть ребро, инцидентное соответствующей вершине. Проведем доказательство индукцией по числу существенных переменных функции. Базис $n = 2$ очевиден. Не ограничивая общности рассуждений, предположим, что $i \neq 1$, и рассмотрим разложение по первой переменной

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(0, x_2, \ldots, x_n)\overline{x_1} \vee x_1 f(1, x_2, \ldots, x_n).$$

Если хотя бы одна из компонент содержит несколько существенных переменных, среди которых есть x_i, то утверждение справедливо в силу предположения индукции. В противном случае в силу существенности всех переменных функции f разложение по первой переменной имеет вид

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{\sigma_1} x_i^{\sigma_i} \vee$$
$$\vee x_1^{\overline{\sigma_1}} \phi(x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Подставим константы на места переменных подфункции ϕ так, чтобы она равнялась единице. Получим остаточную функцию $x_i^{\sigma_i} \vee x_1^{\overline{\sigma_1}}$. Вспомогательное утверждение полностью доказано.

Проведем доказательство утверждения леммы также индукцией по числу переменных функции. Случаи $n = 0, 1, 2$ тривиальны. Разложим функцию большего числа аргументов по первой переменной

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(0, x_2, \ldots, x_n)\overline{x_1} \vee x_1 f(1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= g_0(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})\overline{x_1} \vee g_1(x_{j_1}, \ldots, x_{j_r})x_1.$$

Функции g получены из компонент f удалением фиктивных переменных. Графы G_{g_0} и G_{g_1} являются подграфами графа G_f и связны по предположению индукции. Среди их вершин присутствуют все переменные функции f, кроме x_1, в силу их существенности. Некоторая вершина одного из графов связана ребром с вершиной x_1 в силу существенности x_1, поэтому если среди переменных функций g_0 и g_1 есть общие, то граф G_f связен. Пусть, наконец, множества переменных функций g_0 и g_1 не пересекаются. Фиксируем множество значений одних из них так, чтобы соответствующая подфункция g_σ равнялась единице, а других – так, чтобы $g_{\overline{\sigma}}$ равнялась одной из оставшихся переменных x_t или ее отрицанию. Получаемая из f при такой подстановке остаточная функция равна дизъюнкции функций переменных x_t и x_1, что доказывает наличие ребра (x_1, x_t) и, следовательно, связность графа G_f. Лемма доказана.

Множеством гиперкубов существенности l-бесповторной функции называется множество наборов аргументов и значений функции на этих наборах, содержащее для каждого набора l переменных, если это возможно, 2^l наборов, совпадающих в оставшихся компонентах, и таких, что соответствующая остаточная функция существенно зависит от всех l переменных.

Булева функция $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, существенно зависящая от своих аргументов, называется дискриминирующей, если при любом выборе констант α остаточная подфункция $f(\alpha, \mathbf{y})$ имеет фиктивную переменную. Для конкретной дискриминирующей функции могут, вообще говоря, существовать несколько способов разбиения переменных на множества $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

Замечание 3. Из леммы 2 вытекает, что гиперкуб существенности отсутствует для переменных $\mathbf{z}$ бесповторной функции f тогда и только тогда, когда в произвольном правильном дереве для f все переменные $\mathbf{z}$ лежат над некоторой вершиной, помеченной дискриминирующей функцией, причем все они лежат в поддеревьях со входами $\mathbf{y}$ и для каждого такого поддерева число переменных из множества $\mathbf{z}$ в нем непусто.

Тестом для l-бесповторной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, существенно зависящей от всех переменных, называется множество наборов, на котором f отличается от любой другой l-бесповторной функции, зависящей от аргументов $x_1, \ldots, x_n$ произвольным образом.

Лемма 10. Множество гиперкубов существенности является тестом для l-бесповторной функции, произвольный хребет которой не содержит дискриминирующих функций.

Доказательство. Для функции, хребет которой не содержит дискриминирующих функций, множество гиперкубов существенности содержит таблицу существенности и по теореме 4 и лемме 8 является тестом для функции.

Лемма 11. Множество гиперкубов существенности является тестом для l-бесповторной функции, произвольный хребет которой не содержит дискриминирующих функций арности, меньшей l.

Доказательство. Множество гиперкубов существенности функции f позволяет установить существование правильного дерева с функцией ϕ в корне по связности гиперграфа G_ϕ^f в соответствии с процедурами леммы 4 и теоремы 4. Кроме этого, по следствию 2 из леммы 4 устанавливается распределение аргументов поддеревьев. Заметим, что в силу замечания 3 последнего достаточно для установления всех прочерков в таблице существенности, вызванных наличием дискриминирующей функции в корне и распределением аргументов. Повторяя рассуждения для поддеревьев, мы получим хребет функции и таблицу существенности. По лемме 8 множество гиперкубов существенности будет являться тестом. Лемма доказана.

Лемма 12. Множество гиперкубов существенности l-бесповторной функции позволяет доказать наличие в корне произвольного ее правильного дерева произвольного $l-1$-местного дискриминирующей функции и восстановить аргументы поддеревьев с точностью до преобразований (1).

Доказательство. Соответствующий дискриминирующей функции d гиперграф G_d^f будет очевидно связен. Для того, чтобы воспользоваться леммой 4 и следствием 2 из нее остается доказать отсутствие в корне l-собственной функции. Пусть такая функция ϕ все-таки существует. Тогда существует хорошая раскраска вершин гиперграфа G_ϕ^f в l цветов. Рассмотрим возможные варианты этой раскраски. Пусть l переменных разбиты на $l-1$ непустых групп по принадлежности поддеревьям дерева с корнем d. Тогда по леммам 1 и 2 в корне реализуется функция, однотипная с $d(y_1, \ldots, y_{l-2}, \tau(y_{l-1}, y_l))$ для некоторой существенной функции τ. Если переменные $\mathbf{y}$ окрашены не в один цвет (это означает, что функция является некоторой остаточной от функции ϕ), то все переменные y_i и y_j для $1 \leq i < j \leq l-2$ имеют разные цвета. Поскольку общее количество цветов меньше l (иначе остаточная функция была бы однотипна с ϕ на любом гиперкубе), переменные y_{l-1} и y_l окрашены в одинаковый, например, $l-1$-й цвет. Применив достаточное количество раз лемму о связной существенности к функции, реализуемой в $l-1$ корневом поддереве правильного дерева f с корнем d и теми же внешними переменными $\mathbf{y}$, получим, что все поддерево окрашено в один $l-1$-й цвет. Повторив рассуждения для других поддеревьев, получим противоречие: в гипотетической хорошей раскраске отсутствует l-й цвет. Лемма доказана.

Теорема 5. Пусть произвольный хребет l-бесповторной функции n переменных не содержит дискриминирующих функций, зависящих от $l-1$ и менее переменных. Тогда длина минимального теста этой функции не превосходит $2^l \sum\limits_{i=0}^{l} \binom{n}{i}$.

Доказательство. множество гиперкубов существенности содержит не более $2^l \sum\limits_{i=0}^{l} \binom{n}{i}$ наборов. По лемме 12 это множество позволяет восстановить с точностью до преобразований (1) функцию в корне правильного дерева и распределение ее аргументов. Последнее в силу замечания 3 позволяет восстановить прочерки в таблице существенности, вызванные наличием дискриминирующей функции в корне и данного распределения аргументов. Повторяя рассуждения для поддеревьев, мы получим хребет функции и таблицу существенности. По лемме 8 мы имеем тест. Лемма доказана.

Из теоремы 5, оценки длины теста для дизъюнкции (см.[7]) и отсутствия дискриминирующих функций, зависящих от двух переменных, для функции Шеннона $T_{B_4}(n)$ длины теста 4-бесповторных функций вытекает следующее утверждение.

Теорема 6.

$$\sum_{i=0}^{4} \binom{n}{i} \leq T_{B_4}(n) \leq 16\binom{n}{4}.$$

Вернемся теперь к обоснованию полиномиальности распознавания бесповторности и построения кода функции с бесповторными 0- и 1-компонентами. Предположим бесповторность функции f. Рассмотрим произвольные правильные деревья подфункций: D_0 для $f_0 = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ и D_1 для $f_1 = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)$. Занумеруем вершины в дереве D функции f на пути из x_n в корень, начиная со смежной с листом x_n и заканчивая корнем. Пусть в вершине v дерева D реализуется функция g. Образом вершины v будем называть вершину v_σ ($\sigma \in \{0, 1\}$) дерева D_σ функции f_σ, в которой реализуется подфункция, зависящая от переменных подфункции, реализуемой в вершине D, причем от максимального подмножества. Если таких вершин несколько, то берется вершина, смежная со всеми из них. Данное определение корректно, однако мы не будем использовать факт существования образа, доказывая его каждый раз в каждой конкретной ситуации.

Лемма 13. Пусть в правильном дереве D бесповторной функции f вершина v не является занумерованной и в ней реализуется функция h. Тогда существует дерево $\tilde{D}_\sigma$ для σ-компоненты функции f, в котором либо отсутствуют все переменные функции h, либо в одной из вершин реализуется функция h, либо в одной из вершин реализуется функция $\overline{h}$.

Доказательство. По лемме о разложении среди остаточных подфункций функции f, зависящих от всех переменных функции h и только от них, не может быть отличных от констант, h и отрицания h. В силу этого обстоятельства по той же лемме о разложении для функции f_σ существует искомое дерево $\tilde{D}_\sigma$. Лемма доказана.

Лемма 14. Образы вершин, отличных от занумерованных, существуют и являются либо белыми, либо черными, либо частично белыми, либо частично черными, либо зелеными (частично зелеными).

Доказательство. Пусть в незанумерованной вершине v дерева D реализуется функция h. Деревья $\tilde{D}_0$ и $\tilde{D}_1$ (из доказательства леммы 13) преобразуем к правильным D'_0 и D'_1. Изначально попарно белые или черные вершины, реализующие h и $\overline{h}$, могут стать частично белыми или черными за счет ликвидации отрицаний внутренних вершин и склейки вершин, помеченных символами $\{\&, \vee, \oplus, \overline{\oplus}\}$. Если некоторая вершина дерева $\tilde{D}_\sigma$ была зеленой относительно $\tilde{D}_{\overline{\sigma}}$, то в новой паре деревьев она может стать частично зеленой при склейке вершин, помеченных символами $\{\&, \vee, \oplus, \overline{\oplus}\}$. В силу теоремы о негативности вершины деревьев D'_0 и D'_1 имеют попарно белые или черные с ними вершины, соответственно, в деревьях D_0 и D_1. Для доказательства леммы остается применить утверждения о цветах трех вершин.

Лемма 15. Пусть $g_\sigma(h(\mathbf{v}), \mathbf{w})$ и $g_{\overline{\sigma}}(\mathbf{w})$ – 0- и 1- компоненты l-бесповторной функции $f(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \tau)$. Тогда существует l-бесповторная функция $f'(z, \mathbf{w}, \tau)$ с 0- и 1- компонентами $g_\sigma(z, \mathbf{w})$ и $g_{\overline{\sigma}}(\mathbf{w})$, удовлетворяющая условию

$$f(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \tau) = f'(h(\mathbf{v}), \mathbf{w}, \tau). \tag{3}$$

Доказательство. Существование представления (3) с соответствующей l-бесповторной функцией f' вытекает из леммы о разложении. Замена $h(\mathbf{v})$ на новую переменную z в функции $f'(h(\mathbf{v}), \mathbf{w}, \tau)$ приведет к тому, что σ-компонента этой функции будет равна $g_\sigma(z, \mathbf{w})$, а $\overline{\sigma}$-компонента будет равна $g_{\overline{\sigma}}(\mathbf{w})$. Лемма доказана.

Лемма 16. Пусть $g_0(h(\mathbf{v}), \mathbf{w})$ и $g_1(h(\mathbf{v}), \mathbf{w})$ являются, соответственно, 0- и 1- компонентами l-бесповторной функции $f(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \tau)$. Тогда существует l-бесповторная функция $f'(z, \mathbf{w}, \tau)$ с 0- и 1- компонентами $g_0(h(z, \mathbf{w}))$ и $g_1(h(z, \mathbf{w}))$, удовлетворяющая условию (3).

Доказательство полностью повторяет доказательство предыдущей леммы.

Назовем преобразование деревьев эквивалентным, если оно переводит деревья 0- и 1-компонент бесповторных функций и только их в деревья 0- и 1-компонент бесповторных функций и при этом обратимо за полиномиальное время.

Из лемм 14, 15 и 16 вытекают следующие утверждения.

Лемма 17.

1. Замена зеленой вершины в дереве D_σ на новую переменную является эквивалентным преобразованием.

2. Замена белых (черных) вершин на переменную (переменную и отрицание) является эквивалентным преобразованием.

3. Поддеревья, соответствующие частично белым (частично черным) вершинам, можно эквивалентно заменить (как поддеревья) на пару одинаковых переменных (или пару переменная-отрицание), связанных с соответствующими вершинами, помеченными символами из множества $\{\&, \vee, \oplus, \overline{\oplus}\}$, в исходных деревьях.

4. Поддерево, соответствующее частично зеленой вершине, может быть эквивалентно заменено на переменную, связанную с соответствующей вершиной, помеченной символом из множества $\{\&, \vee, \oplus, \overline{\oplus}\}$, в исходном дереве.

Обрезанным назовем правильное дерево, не имеющее вершин с двумя и более поддеревьями, отличными от листьев, и вершин, помеченных символами из множества $\{\&, \vee, \oplus, \overline{\oplus}\}$ с тремя и более поддеревьями. После всевозможных эквивалентных замен пар белых, черных, частично белых, частично черных вершин и замен зеленых и частично зеленых вершин на переменные, деревья D_0 и D_1 перейдут в деревья компонент функции, правильное дерево которой является обрезанным.

Итак, рассмотрим функцию f с обрезанным деревом. В первой вершине реализуется функция $g^1(x_1^1, \ldots, x_{s_1-1}^1, x_n)$. В i-й вершине реализуется функция $g^i(x_1^i, \ldots, x_{s_i-1}^i, g^{i-1})$. Рассмотрим правильное дерево функции f_σ. Возможны следующие четыре взаимоисключающие варианта:

1. Функция $g^1(x_1^1, \ldots, x_{s_1-1}^1, \sigma)$ – константа. Это возможно только если g^1 – конъюнкция или дизъюнкция.

2. Функция $g^1(x_1^1, \ldots, x_{s_1-1}^1, \sigma)$ – переменная или отрицание переменной.

3. Функция $g^1(x_1^1, \ldots, x_{s_1-1}^1, \sigma)$ представима в виде правильного дерева, в корне которого расположена вершина, помеченная символом из множества $\{\&, \vee, \oplus, \overline{\oplus}\}$.

4. Не выполнен ни один из первых трех вариантов.

Посмотрим, что произойдет при преобразовании получаемого дерева к правильному. В случаях 2) и 4) мы сразу имеем правильное дерево. В случае 3) дерево не будет правильным лишь если вторая вершина помечена символом из множества $\{\&, \vee, \oplus, \overline{\oplus}\}$, совпадающим с символом в корне правильного дерева для g_σ^1. В этом случае эти вершины склеиваются. В случае 1) рассуждения полностью повторяются для функции $g^2(x_1^2, \ldots, x_{s_2-1}^2, g_\sigma^1)$, которая не может быть константой в силу того, что соседние вершины не могут быть помечены двумя конъюнкциями или двумя дизъюнкциями.

Лемма 18. Образы нумерованных вершин обрезанного дерева, начиная с четвертой, являются серыми.

Доказательство. Функция $g^3(x_1^3, \ldots, x_{s_3-1}^3, g_\sigma^2)$ в любом из случаев 1 – 4 не является константой и имеет в корне любого правильного дерева, функцию, однотипную с g^3. Из формулы $g^{i+1}(x_1^i, \ldots, x_{s_i-1}^i, g_\sigma^i)$ по индукции доказывается, что и все последующие g_σ^i не являются константой и имеют в корне любого правильного дерева, функцию, однотипную с g^i. Замена подфункций g_σ^i на одну переменную делает подфункции g_σ^{i+1} равными. Лемма доказана.

Лемма 19. Замена деревьев с серыми корнями на корневые поддеревья с корнями, не являющимися попарно белыми или черными, является эквивалентной заменой.

Доказательство. Пусть $h_0(\mathbf{v})$ и $h_1(\mathbf{v})$ не являются 0- и 1- компонентами бесповторной функции. Рассмотрим функции $g(y_1, \ldots, y_{s-1}, h_0(\mathbf{v}))$ и $g(y_1, \ldots, y_{s-1}, h_1(\mathbf{v}))$. Пусть они являются 0- и 1- компонентами некоторой бесповторной функции $f(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \tau)$. Но тогда подстановка констант β на место переменных $\mathbf{y}$, оставляющая существенной последнюю переменную функции g, делает функции $h_0(\mathbf{v})$ и $h_1(\mathbf{v})$ (или их отрицания) 0- и 1- компонентами бесповторной функции $f(\beta, \mathbf{v}, \tau)$. Получаем противоречие с леммой о разложении. Лемма доказана.

Пользуясь леммой, мы можем свести задачу к задаче для деревьев, являющихся образом обрезанного дерева с корнем не более, чем третьей вершиной. Данная задача является конечной и решается полным перебором за константное время. Теорема 1 доказана.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Валерию Борисовичу Алексееву за огромное время, потраченное на улучшение настоящей работы.

Литература

1. Вороненко А.А. О методе разложения для распознавания принадлежности инвариантным классам // Дискретная математика. 2002, Т.14, N4, с.110-116.

2. Алексеев В.Б. Лекции по дискретной математике. М.: МАКС Пресс. 2004

3. Сэвидж Дж. Э. Сложность вычислений. Изд-во "Факториал". М.: 1998.

4. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. М. Наука. 1992.

5. Вороненко А.А. О проверяющих тестах для бесповторных функций // Математические вопросы кибернетики. – 2002. – Вып. 11 – С. 163-176.

6. Избранные вопросы теории булевых функций (под ред. С.В.Винокурова и Н.А.Перязева) – М. Физматлит. 2001

7. Вороненко А.А. Тестирование на некоторых множествах бесповторных функций // М.: Макс Пресс. 2005. 8 с.

8. Вороненко А.А. О длине проверяющего теста для бесповторных функций в базисе $\{0, 1, \&, \vee, \neg\}$ // Дискретная математика. – 2005. Том 17 выпуск 2. С. 139-143.

9. Вороненко А.А. Об оценке длины проверяющего теста для некоторых бесповторных функций // Прикладная математика и информатика. М.: Макс Пресс. 2003. N 15, с. 85-97.