

*Л. И. Высоцкий<sup>1</sup>, С. А. Ложкин<sup>2</sup>*

## **ОПТИМАЛЬНЫЕ ДВУСТОРОННИЕ ВЛОЖЕНИЯ ПОЛНЫХ ДВОИЧНЫХ ДЕРЕВЬЕВ В ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ РЕШЁТКИ\***

### **Введение**

Проблема оптимального взаимного моделирования вычислений является одной из актуальных задач теории дискретных управляющих систем. Обычно она сводится к задаче оптимизации размещения вычислительных узлов и связей между ними в геометрических структурах определенного вида, например, в прямоугольной решетке.

В такой постановке проблема возникает при проектировании различных цифровых и аналоговых схем в связи со стремлением производителей минимизировать размеры своего продукта, к примеру, при разработке сверхбольших интегральных схем или блока дискретного преобразования Фурье — важной части цифрового сигнального процессора.

В качестве модели геометрической структуры были выбраны прямоугольные решетки, в узлах которых можно размещать вычислительные узлы, а по ребрам проводить соединяющие их проводники. Моделью размещаемого устройства являются полные двоичные деревья. Само размещение задается т.н. гомеоморфным вложением, т.е. отображением вершин дерева в узлы, а ребер — в непрерывные цепи решетки. На это отображение могут накладываться определенные ограничения, следующие из физических или технологических особенностей моделируемой системы. Например, в данной работе требуется, чтобы цепи-образы ребер не пересекались друг с другом в узлах, отличных от вычислительных, а входы устройства располагались на двух противоположных сторонах решетки.

Рассматривается задача нахождения решётки минимальной площади, в которую возможно вложение заданного полного двоичного дерева.

Задача вложения графов рассматривалась многими исследователями. В этой области чаще всего изучаются планарные графы и способы их размещения в плоских прямоугольных и треугольных

<sup>1</sup>Аспирант факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: vysotskylev@yandex.ru.

<sup>2</sup>Профессор факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, д.ф.-м.н., e-mail: lozhkin@cs.msu.ru.

\*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 18-01-00800-а).

решётках. При этом рёбра могут отображаться как в произвольные отрезки [1, 2], так и в непрерывные цепи решётки, как в данной работе. Классическим результатом является NP-трудность задачи построения вложения данного графа, которое минимизирует площадь решётки [3, 4] или общее количество изгибов транзитных цепей [5]. Как примеры позитивных результатов, однако, можно привести алгоритмы, за полиномиальное время строящие вложения  $N$ -вершинного графа в решётки размером  $2N \times 2N$ , в которых количество изгибов любой транзитной цепи ограничено пятью [6] и двумя [7].

В работе [8] рассматривается задача преобразования деревьев формул для построения оптимального по высоте одностороннего вложения в прямоугольную решётку. Авторы приводят метод построения оптимального по высоте вложения (среди всех вложений деревьев формул, подобных заданной и имеющих высоту не более фиксированного числа).

Задача вложения полных двоичных деревьев в прямоугольные решётки также исследовалась ранее. В [9] описывается метод построения вложения полного дерева глубины  $n$  в решётку площади  $\sim 2^{n+1}$  (если допускается перегрузка рёбер не более 2) и в решётку площади  $\sim \frac{81}{64}2^{n+1}$  (если максимальная перегрузка рёбер равна 1). Аналогичная задача при дополнительном ограничении на расположение листьев на границе решётки была рассмотрена в [10]. Там же авторы получили асимптотически точные оценки оптимальной площади вложения полного двоичного дерева: одностороннего при перегрузке один ( $\frac{n}{2}2^n$ ) и два ( $\frac{n}{2}2^n$ ), а также двустороннего при перегрузке два ( $\frac{n}{4}2^n$ ).

Соответственно, открытым остался вопрос о получении асимптотически оптимальных двусторонних вложений при максимальной перегрузке вершин и рёбер, равной единице. В данной работе представлен алгоритм, позволяющий получить асимптотически оптимальную верхнюю оценку указанной величины.

### Основные определения

Вложением графа  $G$  в граф  $F$  назовем пару отображений  $(\varphi, \psi)$ :

$$\varphi : V_G \rightarrow V_F, \quad \psi : E_G \rightarrow C(F),$$

обладающую тем свойством, что для любого ребра  $e = (u, v) \in E_G$  цепь  $\psi(e)$  соединяет вершины  $\varphi(u)$  и  $\varphi(v)$ . При этом образы вершин из  $V_G$  будем называть основными вершинами вложения, цепи, являющиеся образами ребер из  $E_G$ , — транзитными цепями вложения, ребра и внутренние вершины (т. е. не совпадающие с концами) транзитных цепей — транзитными ребрами и вершинами соответственно.

Будем рассматривать лишь те вложения, для которых различные вершины графа  $G$  переходят в различные вершины графа  $F$ , транзитные цепи не имеют общих ребер, а через одну транзитную вершину проходит

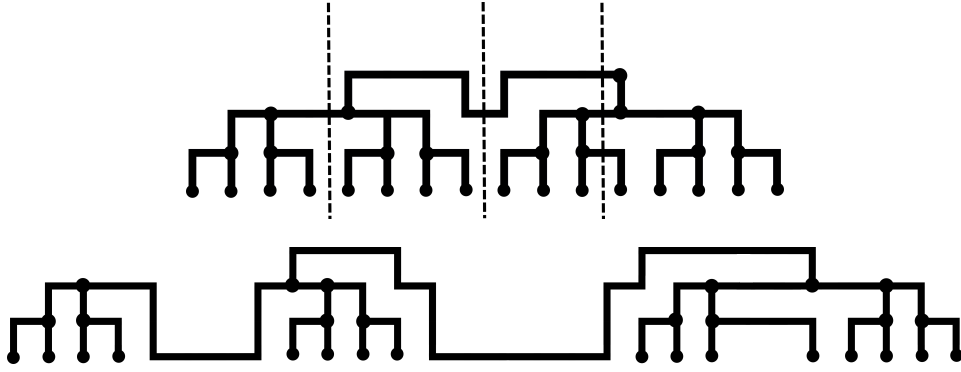


Рис. 1. Стандартное вложение  $D_4$  до (сверху) и после (снизу) трёх операций растяжения, изображённых с помощью пунктирных отрезков

не более одной транзитной цепи.

Прямоугольной решёткой  $A_{l,h}^{a,b}$  назовём граф со множеством вершин

$$V_{A_{l,h}^{a,b}} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z}^2 : a \leq x < a + l, b \leq y < b + h \right\},$$

в котором рёбра соединяют все пары точек  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V_{A_{l,h}^{a,b}}$  таких, что  $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 1$ . Площадь решётки называется величина  $lh$ , которая, очевидно, равна  $|V_{A_{l,h}^{a,b}}|$ .

Рассматриваются вложения полных двоичных деревьев в прямоугольные решётки, при которых образы листьев располагаются на двух противоположных сторонах решётки (для определённости можно считать, что на верхней и нижней) — т. н. двусторонние вложения. Потребуем также, чтобы образ корня располагался на левой или правой стороне решётки.

Пусть, далее,  $D_n$  — полное двоичное дерево глубины  $n$ , а  $S(n)$  — минимальная площадь решётки, в которую возможно вложение дерева  $D_n$ .

### Вспомогательные определения и утверждения

Рассмотрим вложение дерева  $D_n$ , получаемое следующим образом: расположим в узле с координатами  $(i, 0)$  решётки длины  $2^n$  образ  $i$ -го листа. Теперь соединим  $(2j)$ -й лист с  $(2j + 1)$ -м листом ( $j \in \{0, \dots, 2^{n-1} - 1\}$ ) цепью через точки  $(1, 2j)$  и  $(1, 2j + 1)$ . Для чётных  $j$  образ родителя  $(2j)$ -го и  $(2j + 1)$ -го листьев расположим в точке  $(1, 2j + 1)$ , для нечётных — в  $(1, 2j)$ . Теперь попарно будем соединять этих родителей и так далее. При этом соединительные цепи будем проводить так низко, как это возможно, а образы родителей располагать так, чтобы соединительные цепи получались самыми короткими. Пример описанного вложения дерева  $D_4$  можно увидеть на Рис. 1.

Назовём вложение стандартным, если оно получено из описанного выше с помощью нескольких операций растяжения. Эта операция состоит

в следующем выбирается некоторая нецелая координата  $x_0$ ; удаляются все транзитные цепи, пересекаемые вертикальной прямой  $x = x_0$ ; получившиеся части решётки раздвигаются по горизонтали на некоторое целочисленное расстояние; удалённые цепи (начиная с самой нижней) проводятся заново настолько низко, насколько возможно.

Рассмотрим одностороннее нерастянутое стандартное вложение дерева  $D_n$ . Обозначим  $\tilde{D}_n$  “верхнюю часть” этого дерева глубины  $2m \equiv 2m(n) \equiv n - \Delta(n)$ , где  $\Delta(n) = \lceil 2\log_2 n \rceil + \Delta_1$  (причём число  $\Delta_1 \in \{0, 1\}$  выбирается таким образом, чтобы число  $m(n)$  было целым). Вычислим число  $t_m(i)$  транзитных цепей вложения, проходящих над образом  $i$ -го (считая с нуля) листа дерева  $\tilde{D}_n$ . Запишем  $i$  в четверичной системе счисления:  $\alpha(i) = \alpha_{m-1} \dots \alpha_0$ ,  $\alpha_j \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Пусть  $v_1(\alpha)$ ,  $v_2(\alpha)$  суть количество единиц и двоек соответственно в строке  $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}^m$ . Обозначим  $v_0(\alpha)$  количество подстрок вида  $02^*3$  или  $02^*\$$ , где  $a^*$  для  $a \in \{0, 1, 2, 3\}$  есть строка из нуля или более символов  $a$ , а  $\$$  обозначает конец строки. Аналогично пусть  $v_3(\alpha)$  обозначает количество подстрок вида  $31^*0$  или  $31^*\$$ .

**Лемма 1.**  $t_m(i) = v_0(\alpha(i)) + v_1(\alpha(i)) + v_2(\alpha(i)) + v_3(\alpha(i))$ .

**Доказательство.** Без ограничения общности будем считать, что  $n$  чётно. Тогда удобно рассматривать процедуру построения вложения дерева  $D_n$ , увеличивая на каждом шаге глубину на 2, а высоту на 1, т.е. объединяя поддерева по 4 штуки. Тогда  $k$ -ый четверичный разряд числа  $i$  соответствует транзитным цепям, соединяющим поддерева глубины  $2k$ .

Отсюда ясно, что каждая единица и двойка в строке  $\alpha(i)$  дадут “вклад” 1 в число  $t_m(i)$ . Рассмотрим теперь разряд номер  $k$ ,  $1 \leq k \leq m - 1$ , в котором находится 0. Ясно, что если  $\alpha_{k-1} = 3$ , то объединение транзитных цепей, соответствующее  $k$ -му разряду, даст вклад 1 в число  $t_m(i)$ . Напротив, если  $\alpha_{k-1} \in \{0, 1\}$ , то рассматриваемые транзитные цепи точно не лежат над образом  $i$ -го листа. Это следует из того, что образы листьев отстоят друг от друга не менее, чем на  $2^{\Delta(n)-1} \geq 2n$ , а для абсциссы  $x$  любого конца транзитной цепи, соответствующей дереву  $\tilde{D}_n$ , верно включение  $x \in [x_v - n, x_v + n]$ , где  $x_v$  — абсцисса образа некоторого листа.

Единственным нерассмотренным остался случай  $\alpha_{k-1} = 2$ . Здесь нужно рассмотреть уже  $(k - 2)$ -ой разряд. Здесь всё абсолютно аналогично: если  $\alpha_{k-2} \in \{0, 1\}$ , то рассматриваемые транзитные цепи точно не лежат над  $i$ -ым листом, а если  $\alpha_{k-2} = 3$ , то точно лежат. Отсюда следует, что транзитные цепи, соответствующие  $k$ -му разряду, лежат над  $i$ -м листом тогда и только тогда, когда за  $\alpha_k = 0$  следует последовательность  $2 \dots 23$  или  $2 \dots 2\$$ .

Абсолютно аналогичное рассуждение для случая  $\alpha_k = 3$  завершает доказательство леммы.

**Следствие.** Для любых целых  $m \geq 1$  и  $i$ ,  $0 \leq i \leq 4^m - 1$ , верно  $t_m(i) \leq m$ .

Следующее важное свойство, которое нам понадобится, заключается в свойстве аддитивности функции  $t(\cdot)$  относительно конкатенации четверичных записей аргументов. Именно, имеет место следующая

**Лемма 2.** Для любых целых  $m_1, m_2 \geq 1$ ,  $0 \leq i \leq 4^{m_1} - 1$  и  $0 \leq j \leq 4^{m_2} - 1$  верно неравенство

$$t_{m_1+m_2}(4^{m_2}i + j) \leq t_{m_1}(i) + t_{m_2}(j). \quad (1)$$

**Доказательство.** Будем смотреть на вычисление функции  $t(\cdot)$  с точки зрения четверичных строк. Именно, будем считать, что нам даны строки  $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}^{m_1}$  и  $\beta \in \{0, 1, 2, 3\}^{m_2}$ , а  $\gamma = \alpha\beta$  — их конкатенация. Ясно, что  $v_d(\alpha) + v_d(\beta) = v_d(\gamma)$  для  $d \in \{1, 2\}$ . Покажем, что  $v_0(\alpha) + v_0(\beta) \geq v_0(\gamma)$  (для  $v_3(\cdot)$  рассуждение аналогично). Рассмотрим все подстроки вида  $02 * \$$  или  $02 * 3$  в  $\gamma$ . Каждая из них либо присутствует в  $\alpha$  или  $\beta$  (и даст вклад в  $v_0(\alpha)$  или  $v_0(\beta)$ ), либо пересекается границей между  $\alpha$  и  $\beta$ . Но в последнем случае она даст вклад в  $v_0(\alpha)$ , поэтому окончательно  $v_0(\alpha) + v_0(\beta) \geq v_0(\gamma)$ .

Обозначим  $N(m, k)$  количество целых чисел  $i$ ,  $0 \leq i \leq 4^m - 1$ , для которых  $t_m(i)$  равно  $k$ . Для получения оценки величины  $N(m, k)$  воспользуемся теорией вероятностей (все используемые определения и факты можно найти в [11]). Именно, фиксируем некоторое  $m$  и рассмотрим пространство элементарных исходов  $\Omega = \{0, \dots, 4^m - 1\}$ , а вероятностную меру определим как  $\Pr(i) = 4^{-m}$ . Далее, определим случайные величины  $\xi_0, \dots, \xi_{m-1}$  следующим образом:  $\xi_k(i) = 1$  в том и только том случае, если над образом  $i$ -ого листа дерева  $\tilde{D}_n$  лежит транзитная цепь с ординатой  $k + 1$ .

Начнём с вычисления математического ожидания  $\mathbb{E}(\eta)$  суммы  $\eta$  случайных величин  $\xi_0 + \dots + \xi_{m-1}$ . По свойству линейности математического ожидания имеем

$$\mathbb{E}(\xi_0 + \dots + \xi_{m-1}) = \mathbb{E}(\xi_0) + \dots + \mathbb{E}(\xi_{m-1}).$$

Если при этом воспользоваться независимостью и равномерной распределённостью случайных величин  $\alpha_k(i)$ , равных значению  $k$ -го разряда в четверичной записи числа  $i$ , то можно получить следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi_k) &= \Pr(\xi_k = 1) = \Pr(\alpha_k \in \{1, 2\}) \cdot \Pr(\xi_k = 1 \mid \alpha_k \in \{1, 2\}) + \\ &+ \Pr(\alpha_k \in \{0, 3\}) \cdot \Pr(\xi_k = 1 \mid \alpha_k \in \{0, 3\}) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Pr(\xi_k = 1 \mid \alpha_k \in \{0, 3\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Pr(\xi_k = 1 \mid \alpha_k = 0). \end{aligned}$$

Последняя условная вероятность может быть легко вычислена, если опираться на рассуждения леммы 1. Действительно, если  $\alpha_k(i) = 0$ , то

$\xi_k(i) = 1$  в том и только том случае, когда после  $k$ -ой позиции в четверичной записи идут подстроки вида  $2^*3$  или  $2^*\$$ . Поэтому

$$\begin{aligned}\Pr(\xi_k = 1 \mid \alpha_k = 0) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^{k-1}} + \frac{1}{4^k} + \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4} \frac{1 - \frac{1}{4^k}}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{4^k} = \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^k}\right) + \frac{1}{4^k} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3 \cdot 4^k}.\end{aligned}$$

Итак, искомое матожидание суммы есть

$$\frac{2m}{3} + \frac{4}{3}(1 - 4^{-m}).$$

Теперь можно перейти к вычислению дисперсии суммы.

Для начала нам понадобится вероятность  $\Pr(\xi_k = 1 \wedge \xi_l = 1)$  при  $k > l$ :

$$\Pr(\xi_k = 1 \wedge \xi_l = 1) = \frac{1}{2} \Pr(\xi_l = 1 \mid \alpha_k \in \{1, 2\}) + \frac{1}{2} \Pr(\xi_l = 1 \wedge \xi_k = 1 \mid \alpha_k = 0).$$

Последняя вероятность разлагается в сумму (здесь  $\alpha[s : t]$  обозначает подстроку  $\alpha_s \dots \alpha_t$ , а  $a^k$  — строку из  $k$  символов  $a$ ):

$$\begin{aligned}\Pr(\xi_l = 1 \wedge \xi_k = 1 \mid \alpha_k = 0) &= \\ &= \sum_{s=1}^k \frac{1}{4^s} \Pr(\xi_l = 1 \mid \alpha[k : k-s+1] = 02^{s-1}3) + \frac{1}{4^k} \Pr(\xi_l = 1 \mid \alpha[k : 0] = 02^k) = \\ &= \sum_{s=1}^{k-l-1} \frac{1}{4^s} \Pr(\xi_l = 1 \mid \alpha[k : k-s+1] = 02^{s-1}3) + \frac{1}{4^{k-l}} \Pr(\xi_l = 1 \mid \alpha_l = 3) + \\ &+ \sum_{s=k-l+1}^k \frac{1}{4^s} \Pr(\xi_l = 1 \mid \alpha_l = 2) + \frac{1}{4^k} \Pr(\xi_l = 1 \mid \alpha_l = 2) \leq \\ &\leq \Pr(\xi_l = 1) \Pr(\xi_k = 1 \mid \alpha_k = 0) + \sum_{s=k-l}^k 4^{-s} + 4^{-k}.\end{aligned}$$

Итого,

$$\Pr(\xi_k = 1 \wedge \xi_l = 1) \leq \Pr(\xi_k = 1) \Pr(\xi_l = 1) + \sum_{s=k-l}^k 4^{-s} + 4^{-k}.$$

Теперь можно записать следующую оценку для ковариации  $\xi_k$  и  $\xi_l$ :

$$\text{cov}(\xi_k, \xi_l) = \Pr(\xi_k = 1 \wedge \xi_l = 1) - \Pr(\xi_k = 1) \Pr(\xi_l = 1) \leq \sum_{s=k-l}^k 4^{-s} + 4^{-k}.$$

Наконец, дисперсия суммы есть

$$\mathbb{D}(\eta) = \sum_k \mathbb{D}(\xi_k) + 2 \sum_{k \neq l} \text{cov}(\xi_k, \xi_l) \leq \sum_k \mathbb{D}(\xi_k) + \sum_{k \neq l} \left( \sum_{s=k-l}^k 4^{-s} + 4^{-k} \right).$$

Несложно показать, что второе слагаемое есть  $O(m)$ , для вычисления первого заметим, что

$$\mathbb{D}(\xi_k) = \mathbb{E}(\xi_k^2) - (\mathbb{E}(\xi_k))^2 \leq \mathbb{E}(\xi_k^2) = \mathbb{E}(\xi_k) \leq 1.$$

Поэтому  $\mathbb{D}(\eta) = O(m)$ . Отсюда можно вывести утверждение, которое пригодится нам в дальнейшем:

**Лемма 3.** Для любого  $\varepsilon > 0$  при  $m \rightarrow \infty$  выполнено

$$\Pr\left(\left|\eta - \frac{2m}{3}\right| > m\varepsilon\right) = O\left(\frac{1}{m}\right).$$

**Доказательство.** Получается применением неравенства Чебышева к вероятности  $\Pr(|\eta - \mathbb{E}\eta| > m\varepsilon')$ , где  $\varepsilon' = \varepsilon + \frac{4}{3m}$ .

**Следствие 1.** Для любого  $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k=\lfloor (\frac{2}{3}+\varepsilon)m \rfloor}^m N(m,k) = O\left(\frac{4^m}{m}\right), \quad \sum_{k=0}^{\lceil (\frac{2}{3}-\varepsilon)m \rceil} N(m,k) = O\left(\frac{4^m}{m}\right).$$

**Доказательство.** Достаточно заметить, что  $N(m,k) = 4^m \Pr(\eta = k)$ .

### Алгоритм построения вложения

Опишем алгоритм  $\mathcal{A}$ , принимающий на вход числа  $n$  и  $h$  и строящий вложение дерева  $D_{n+1}$  в решётку высоты  $h + \Delta(n) + O(1)$ . Выделим в данном дереве поддеревья  $T_U$  и  $T_L$  глубины  $n$  и рассмотрим их односторонние стандартные вложения:  $T_U$  — с образами листьев на верхней стороне решётки и  $T_L$  — на нижней. Далее, как в начале предыдущего раздела, выделим в обоих деревьях ближние к корню части глубины  $2m(n) = n - \Delta(n)$  (напомним, что они обозначаются  $\tilde{T}_U$  и  $\tilde{T}_L$ ).

Листья деревьев  $T'_U$  и  $T'_L$  будем отображать лишь в заранее фиксированные позиции с абсциссами  $\frac{1}{2}2^{\Delta(n)} + i2^{\Delta(n)}$ ,  $0 \leq i \leq 2 \cdot 4^m - 1$  (заметим, что такого количества позиций хватит для размещения обоих деревьев, если такое вообще возможно). Зададимся проблемой построения функций-растяжений  $U(i)$  и  $L(i)$ , отображающих индекс позиции на соответствующей стороне решётки в номер ближайшего слева листа и обладающих следующим свойством: для всех  $i$ ,  $0 \leq i \leq 2 \cdot 4^m - 1$ , верно неравенство

$$t_m(U(i)) + t_m(L(i)) \leq h. \quad (2)$$

При этом если листа слева нет, то договоримся считать, что  $U(i) = \perp$  (или  $L(i) = \perp$ ), а  $t(\perp) = 0$ . Оптимизировать при этом мы хотим величину

$$\ell_m(U, L) = \max\left(\max_i U(i), \max_i L(i)\right),$$

т.к. она определяет “эффективную” длину решётки (измеренную в описанных выше “позициях”).

Опишем далее алгоритм  $\mathcal{B}$ , принимающий на вход пару целых чисел  $(m, h)$  и строящий некоторые функции растяжения.

Если  $h < m$ , то выйти с ошибкой “невозможно построить вложение”. Если  $h \geq 2m$ , то вернуть “тождественные” растяжения  $U$  и  $L$ :

$U(i) = L(i) = i$ . Если  $h = m$ , то вернуть “непересекающиеся” растяжения:

$$U(i) = \begin{cases} i, & \text{если } 0 \leq i \leq 4^m - 1, \\ 4^m - 1, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$L(i) = \begin{cases} \perp, & \text{если } 0 \leq i \leq 4^m - 1, \\ i - 4^m & \text{иначе.} \end{cases}$$

Иначе (если  $m < h < 2m$ ) положить  $p = h - m$ ,  $q = 2m - h$  и  $4^p$  раз вызвать алгоритм  $\mathcal{B}$  рекурсивно на входах  $(q, h - 2t_p(k))$ ,  $0 \leq k \leq 4^p - 1$ , получив в итоге  $4^p$  пар функций растяжения  $U_k, L_k$ . Определить функцию  $U$  следующим образом:

$$U(i) := c(i)4^q + U_{c(i)}(i - S(i)), \quad 0 \leq i \leq 2 \cdot 4^m - 1,$$

где  $c(i)$  — единственное целое число, удовлетворяющее неравенствам

$$\sum_{k=0}^{c(i)-1} \ell_q(U_k, L_k) \leq i \leq \sum_{k=0}^{c(i)} \ell_q(U_k, L_k),$$

а  $S(i) := \sum_{k=0}^{c(i)-1} \ell_q(U_k, L_k)$ . Растяжение  $L$  определить аналогично и вернуть пару  $U, L$ .

По сути, алгоритм  $\mathcal{B}$  выделяет в каждом из деревьев  $\tilde{T}_U$  и  $\tilde{T}_L$   $4^p$  поддеревьев глубины  $2q$  и для каждого  $k$ ,  $0 \leq k \leq 4^p - 1$  с помощью рекурсивного вызова строит вложение  $k$ -ой пары расположенных друг над другом поддеревьев в решётку высоты  $h - 2t_p(k)$ ,

**Лемма 4.** Если  $h \geq m$ , то алгоритм  $\mathcal{B}$  строит функции растяжения  $U$  и  $L$ , удовлетворяющие неравенству (2).

**Доказательство.** В случае  $h \notin (m, 2m)$  утверждение леммы очевидно. Для случая  $m < h < 2m$  покажем сначала, что рекурсия завершается, причём ни на каком шаге не возникает ошибки. Завершаемость алгоритма следует из того, что с увеличением глубины рекурсии параметр  $m$  уменьшается, т.к.  $q = 2h - m < m$ . Неравенство  $h \geq m$  на каждом уровне рекурсии следует из того, что  $t_p(k) \leq p$ , а значит,

$$h - 2t_p(i) \geq h - 2p = q \geq t_q(j), \quad 0 \leq k \leq 4^p - 1.$$

Поэтому алгоритм завершится, причём ни в одном рекурсивном вызове не возникнет ошибки.

Неравенство (2) докажем индукцией по  $m$ . Для  $m = 1$  оно очевидно. Пусть неравенство доказано для всех  $m' \leq m - 1$ ,  $m - 1 \geq 1$ . Тогда, используя лемму 2, можем записать:

$$\begin{aligned} t_m(U(i)) + t_m(L(i)) &\leq 2t_{m-q}(c(i)) + t_q(U_{c(i)}(i - S(i))) + t_q(L_{c(i)}(i - S(i))) \\ &\leq 2t_{m-q}(c(i)) + h - 2t_p(c(i)) = h. \end{aligned}$$

Итак, алгоритм  $\mathcal{A}$  вызывает описанный алгоритм  $\mathcal{B}$ , получая функции  $U$  и  $L$ , и выполняет соответствующие растяжения стандартных



вложений деревьев  $\tilde{T}_U$  и  $\tilde{T}_L$ . Затем он расширяет решётку на  $\frac{\Delta(n)}{2} + O(1)$  сверху и снизу и достраивает вложения до вложения деревьев  $T_U$  и  $T_L$ , используя стандартные вложения поддеревьев глубины  $\Delta(n)$ . Для построения вложения дерева  $D_{n+1}$  растянем решётку по вертикали на  $O(1)$  так, чтобы образы корней деревьев  $T_U$  и  $T_L$  можно было соединить свободной цепью (т.е. из свободных внутренних вершин и свободных рёбер). В эту свободную цепь отобразим два ребра, смежных с корнем дерева  $D_{n+1}$ .

Из леммы 4 и дальнейших построений вытекает

**Теорема 1.** Алгоритм  $\mathcal{A}$ , принимающий на вход числа  $m$  и  $h$ , строит вложение дерева  $D_{n+1}$  в решётку высоты  $h + \Delta(n) + O(1)$ .

**Теорема 2.** Временная сложность алгоритма  $\mathcal{A}$  есть  $O(n2^n)$  битовых операций, а пространственная —  $O(n2^n)$  бит.

**Доказательство.** Сначала рассмотрим работу алгоритма  $\mathcal{B}$ . Можно считать, что  $\mathcal{B}$  в процессе своей работы неявно строит некоторое дерево. Корень соответствует исходным данным  $(m, h)$ , а произвольной вершине  $v$  соответствуют входные данные  $(m(v), h(v))$ . У вершины  $v$  есть  $4^{p(v)}$  детей,  $k$ -му из них соответствуют входные данные  $(q(v), h(v) - 2t_{p(v)}(k))$ . Ветвление продолжается до тех пор, пока не нарушится условие  $m < h(v) < 2m$ . При этом параметр  $m(v)$  уменьшается с увеличением глубины (см. выше), поэтому дерево имеет глубину не более  $m + 1$ .

В каждой вершине  $v$  необходимо вычислить величину  $t_{m(u)-m(v)}(k_v)$ , где  $u$  — родитель  $v$ , а  $k_v$  — номер вершины  $v$  среди детей  $u$ . Это вычисление требует  $O(m)$  битовых операций (см. лемму 1). Поэтому суммарно на вычисление всех необходимых значений функции  $t$  мы потратим  $O(m|V|)$ , где  $V$  — множество всех вершин дерева. Для оценки количества вершин дерева заметим, что для любой вершины  $u$  размер поддерева с корнем в  $u$  не превосходит  $4^{m(u)+1}$ , что доказывается индукцией по  $m(u)$ . Поэтому  $|V| \leq 4^{m+1}$ . Сложность “склейки” всех полученных растяжений в одно есть

$$O(m(4^m + |V|)) = O(m4^m) = O(n2^n).$$

Остальная часть работы алгоритма  $\mathcal{A}$  требует  $O(h2^n)$  битовых операций.

Пространственная сложность алгоритмов  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{A}$ , как несложно видеть, есть  $O(n2^n)$  бит.

### Анализ алгоритма

Проанализируем длину решётки, которое строит алгоритм  $\mathcal{A}$ . Начнём с такой его вариации (обозначим её  $\mathcal{A}_r$ ), когда алгоритм  $\mathcal{B}$  выполняет рекурсию глубины не более  $r$  (соответствующую модификацию алгоритма  $\mathcal{B}$  обозначим  $\mathcal{B}_r$ ).

**Лемма 5.** Для произвольно малого  $\theta \in (0, \frac{1}{6})$  существует такое  $r$ , что алгоритм  $\mathcal{A}_r$  на входе  $(n, \lceil n(\frac{2}{3} + \theta) \rceil)$  строит двустороннее вложение дерева глубины  $n + 1$  площади не более

$$\left(\frac{2}{3} + \theta\right) n 2^n + o(n 2^n).$$

**Доказательство.** Пусть  $U_{r,m,h}$  и  $L_{r,m,h}$  — функции растяжения, выдаваемые алгоритмом  $\mathcal{B}_r$  на входе  $(m, h)$ , а  $\lambda_r(m, h) \equiv \ell_m(U_{r,m,h}, L_{r,m,h})$  — эффективная длина получающего вложения (измеренная в отрезках длины  $2^{\Delta(n)}$ ). Ясно, что при  $m \geq 1$  и  $r \geq 1$

$$\lambda_r(m, h) = \sum_{k=0}^p N(p, k) \lambda_{r-1}(q, h - 2k).$$

Обозначим  $\widehat{k}$  величину  $\lfloor (\frac{2}{3} + \varepsilon)p \rfloor$ , где константу  $\varepsilon > 0$  выберем потом. Учитывая, что для всех  $r$  и таких пар  $(m, h)$ , для которых вложение вообще возможно, выполняется неравенство  $\lambda_r(m, h) \leq 2 \cdot 4^m$ , можем записать

$$\lambda_r(m, h) \leq \sum_{k=0}^{\widehat{k}} N(p, k) \lambda_{r-1}(q, h - 2k) + 2 \cdot 4^q \sum_{k=\widehat{k}+1}^p N(p, k).$$

Наконец, заметим, что функция  $\lambda_r(m, h)$  является невозрастающей по  $h$ . Значит, можно выписать следующую оценку:

$$\lambda_r(m, h) \leq \lambda_{r-1}(q, h - 2\widehat{k}) \sum_{k=0}^{\widehat{k}} N(p, k) + 2 \cdot 4^q \sum_{k=\widehat{k}+1}^p N(p, k).$$

Оценим

$$\sum_{k=0}^{\widehat{k}} N(p, k) \leq \sum_{k=0}^p N(p, k) = 4^p.$$

(последнее равенство следует из определения  $N(p, k)$ ). Более того, по следствию из леммы 3 имеем

$$\sum_{k=\widehat{k}+1}^p N(p, k) = o(4^p).$$

Итого, получаем неравенство  $\lambda_r(m, h) \leq 2^p \lambda_{r-1}(q, h - 2\widehat{k}) + o(4^m)$ .

Будем применять такой же переход до тех пор, пока не придём к  $\lambda_0$ . Мы получим последовательность пар  $(m_0, h_0), \dots, (m_r, h_r)$ , где  $m_0 = m$ ,  $h_0 = h$ ,

$$\begin{cases} m_{i+1} = 2m_i - h_i, \\ h_{i+1} = h_i - 2 \lfloor (\frac{2}{3} + \varepsilon)(h_i - m_i) \rfloor \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_{i+1} = 2m_i - h_i, \\ h_{i+1} = (\frac{4}{3} + 2\varepsilon)m_i + (-\frac{1}{3} - 2\varepsilon)h_i + \kappa_i, \end{cases}$$

где  $0 \leq \kappa_i < 2$ . В матричном виде:

$$\begin{pmatrix} m_{i+1} \\ h_{i+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} m_i \\ h_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa_i \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{4}{3} + 2\varepsilon & -\frac{1}{3} - 2\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\begin{pmatrix} m_r \\ h_r \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{r-1} A^j \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa^{(r-1-j)} \end{pmatrix} + A^r \begin{pmatrix} m_0 \\ h_0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Сумму по  $j$  в правой части обозначим  $(s'_r, s''_r)^T$ . Выпишем жорданову форму матрицы  $A$ :

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{6\varepsilon+4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_C \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} - 2\varepsilon \end{pmatrix}}_J \underbrace{\frac{6\varepsilon+4}{6\varepsilon+1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{6\varepsilon+4} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{C^{-1}}.$$

Поэтому

$$A^r = C J^r C^{-1} = C \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{2}{3} - 2\varepsilon)^r \end{pmatrix} C^{-1} = c_1 \widehat{c}_1^T + \left(\frac{2}{3} - 2\varepsilon\right)^r c_2 \widehat{c}_2^T,$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — столбцы  $C$ , а  $\widehat{c}_1^T$  и  $\widehat{c}_2^T$  — строки  $C^{-1}$ .

Положим теперь  $m_0 = m$ ,  $h_0 = (\frac{4}{3} + 2\theta')m$ , где  $\theta' \in (0, \theta]$  выбирается так, чтобы  $h_0$  было целым. Тогда из равенства (3) получим:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} m_r \\ h_r \end{pmatrix} &= A^r m \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} + 2\theta' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s'_r \\ s''_r \end{pmatrix} = \\ &= m c_1 \underbrace{\widehat{c}_1^T \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} + 2\theta' \end{pmatrix}}_{\beta_1} + m c_2 \underbrace{\left(\frac{2}{3} - 2\varepsilon\right)^r \widehat{c}_2^T \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} + 2\theta' \end{pmatrix}}_{\beta_2} + \begin{pmatrix} s'_r \\ s''_r \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{m_r}{h_r} = \frac{m\beta_1 + \frac{3}{6\varepsilon+4}m\beta_2 + s'_r}{m\beta_1 + m\beta_2 + s''_r} = \frac{\beta_1 + \frac{3}{6\varepsilon+4}\beta_2 + s'_r/m}{\beta_1 + \beta_2 + s''_r/m}.$$

Считая, что  $r$  не зависит от  $m$ , выберем такое  $M(r)$ , что для всех  $m \geq M(r)$  оба выражения  $s'_r/m$  и  $s''_r/m$  по модулю не превосходили  $\varepsilon/(1+12\varepsilon)$ . Далее, выберем  $\varepsilon = \min(\frac{\theta'}{7}, \frac{1}{12})$ , а  $r = \lceil \log_{2/3} \frac{\theta'}{4} \rceil$ . Несложными, но громоздкими алгебраическим преобразованием можно показать, что для всех достаточно больших  $m$  и для  $h = (\frac{4}{3} + 2\theta')m$  будет верно  $m_r/h_r \geq 1$ , а поэтому  $\lambda_0(m_r, h_r) = 4^{m_r}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \lambda_r(m, h) &\leq 4^p \lambda_{r-1}(m_1, h_1) + o(4^m) \leq \dots \leq \\ &\leq 4^{p_0} 4^{p_1} \dots 4^{p_{r-1}} \lambda_0(m_r, h_r) + o(r4^m) = 4^m + o(r4^m). \end{aligned}$$

Итоговая длина решётки равна  $\lambda_r(m, h) 2^{\Delta(n)} \leq 2^n + o(r2^n)$ , а площадь не превосходит

$$h_0 \cdot \lambda_r(m, h) 2^{\Delta(n)} \leq \left(\frac{2}{3} + \theta'\right) n 2^n + o(rn 2^n) \leq \left(\frac{2}{3} + \theta\right) n 2^n + o(rn 2^n).$$

Учитывая, что  $r$  зависит только от  $\theta$  и не зависит от  $n$ , получаем утверждение леммы. В связи с доказанной леммой обозначим  $\mathcal{A}[\theta]$  алгоритм, принимающий на вход единственное число  $n$  и вызывающий алгоритм  $\mathcal{A}$  на входе  $(n-1, \lceil n(\frac{2}{3} + \theta) \rceil)$ . Аналогично определим для произвольного  $r \geq 0$  алгоритм  $\mathcal{A}_r[\theta]$ .

**Теорема 3.** При  $n \rightarrow \infty$  верно асимптотическое неравенство  $S(n) \lesssim \frac{1}{3}n2^n$ .

**Доказательство.** Ясно, что  $S_{\mathcal{A}[\theta]}(n) \leq S_{\mathcal{A},[\theta]}(n)$  для любого  $r$ . Поэтому из доказанной леммы следует, что для любого  $\hat{\theta} \in (0, \frac{1}{3})$  алгоритм  $\mathcal{A} \left[ \frac{\hat{\theta}}{2} \right]$  строит вложение дерева глубины  $n$  в решётку площади не более

$$\left( \frac{1}{3} + \hat{\theta} \right) n2^n + o(2^n),$$

из чего в силу произвольности  $\hat{\theta}$  следует утверждение теоремы.

### Нижняя оценка площади

Приведём несколько определений и фактов из теории потоков в графах. Поток в графе  $G = (V, E)$  назовём функцию  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , обладающая следующими свойствами:

1.  $g(u, v) = -g(v, u)$  для любых пар  $u, v \in V$ .
2.  $g(u, v) = 0$  для всех пар  $u, v : \{u, v\} \notin E$ .

Введём обозначения

$$g_+(u) \equiv \sum_{v \in V} g(u, v), \quad g_-(u) \equiv \sum_{v \in V} g(v, u).$$

Также обозначим  $g(V_1, V_2) := \sum_{v_1 \in V_1} \sum_{v_2 \in V_2} g(v_1, v_2)$ . Вершины  $u$  со свойством  $g_+(u) > 0$  называются источниками, со свойством  $g_-(u) > 0$  — стоками. Для остальных вершин выполняется условие сохранения потока  $g_+(u) = g_-(u) = 0$ .

**Лемма 6.** Пусть дан граф  $G = (V, E)$  и поток  $g$  в нём, причём  $S$  и  $T$  — множество истоков и стоков соответственно. Пусть также фиксировано некоторое разбиение  $(V_1, V_2)$ , т.е. пара подмножеств вершин со свойствами  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  и  $V_1 \cup V_2 = V$ . Тогда

$$g(V_1, V_2) = \sum_{s \in S \cap V_1} g(s+) - \sum_{t \in T \cap V_1} g(t-) = \sum_{t \in T \cap V_2} g(t-) - \sum_{s \in S \cap V_2} g(s+).$$

Рассмотрим произвольное вложение  $M$  неориентированного графа  $F$  в неориентированный граф  $G$ . Пусть также задан некоторый поток  $f$  в графе  $F$ . Тогда можно определить поток  $g$  в графе  $G$  следующим образом:

1. Если ребро  $\{a, b\}$  лежит на некоторой транзитной цепи  $\psi(\{u, v\})$ , то  $g(a, b) := f(u, v)$ , если направление от  $a$  к  $b$  совпадает с направлением от  $\varphi(u)$  к  $\varphi(v)$ , и  $g(a, b) := f(v, u) = -f(u, v)$  в противном случае.
2. Если ребро  $\{a, b\}$  не лежит на транзитной цепи, то  $g(a, b) := 0$ .

Несложно видеть, что данное определение корректно и, более того, источники (стоки) потока  $g$  есть в точности образы источников (соответственно, стоков) потока  $f$ .

Рассмотрим произвольное корневое дерево  $D$  и определим поток  $f$  в нём следующим образом: если  $L$  — множество листьев, то для любого  $u \in L$  выполнено  $f_+(u) = 1$ , а для корня  $r$  верно  $f_-(r) = |L|$ , для остальных вершин поток определяется однозначно из условия сохранения.

Рассмотрим систему счисления, в которой есть цифры  $-1, 0$  и  $1$ , а число, соответствующее записи  $\alpha_{n-1} \dots \alpha_0$ , есть  $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k 2^k$ . Ясно, что числа в такой системе представляются неоднозначно. Тем не менее, можно определить функцию  $\mu(a)$  как минимальное количество ненулевых разрядов записи целого числа  $a$  в указанной системе счисления.

**Лемма 7.** *Рассмотрим полное двоичное дерево  $D_n$  и произвольное одностороннее вложение  $D_n$  в некоторую решётку  $G$ , а также определим поток  $f$  в дереве  $D_n$  и соответствующий поток  $g$  в  $G$ . Для произвольного целого  $k$  рассмотрим вертикальную прямую  $\gamma(k + \frac{1}{2}) : x = k + \frac{1}{2}$  и два множества  $V_1$  и  $V_2$  узлов решётки  $G$ : слева и справа от  $\gamma(k + \frac{1}{2})$ . Тогда прямую  $\gamma(k + \frac{1}{2})$  пересекает не менее  $\mu(g(V_1, V_2))$  транзитных рёбер.*

**Доказательство.** Ясно, что  $g(V_1, V_2)$  складывается из потоков по транзитным рёбрам. Поток по любому транзитному ребру есть степень двойки, т.к. дерево  $D_n$  — полное. Если транзитное ребро пересекает разрез слева направо (под направлением транзитного ребра подразумевается направление к образу корня дерева), то оно даст положительный “вклад” в величину  $g(V_1, V_2)$ , а если справа налево, то отрицательный. Итак,  $g(V_1, V_2)$  есть сумма вида

$$\sum_{w=1}^W \alpha_w 2^{p_w}, \text{ где } \alpha_w \in \{-1, 1\},$$

из чего сразу следует утверждение леммы.

Для произвольного вложения  $M$  определим  $\mathcal{L}(M)$  как суммарную длину всех его транзитных цепей.

**Лемма 8.** *Для произвольной последовательности односторонних вложений  $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$  деревьев  $D_n$  верно асимптотическое неравенство*

$$L(M_n) \gtrsim \frac{n}{3} 2^n \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

**Доказательство.** В работе [12] доказывается, что среднее значение  $\mu(a)$  по всем числам из множества  $\{0, \dots, 2^n - 1\}$  есть  $\frac{n}{3}$ , т.е.

$$\sum_{a=0}^{2^n-1} \mu(a) \sim \frac{n}{3} 2^n \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

При этом ясно, что  $\mathcal{L}(M)$  не может быть меньше суммарного количества транзитных рёбер, пересекающих прямые  $\gamma(\frac{1}{2}), \dots, \gamma(l - \frac{3}{2})$ , где  $l$  есть длина решётки вложения  $M$ .

Заметим также, что в силу леммы 6 для разреза  $(V_1, V_2)$  решётки  $G$  прямой  $\gamma(k + \frac{1}{2})$  величина  $g(V_1, V_2)$  есть количество образов листьев в  $V_1$ , если образ корня лежит в  $V_2$ , и минус количество образов листьев в  $V_2$ , если образ корня лежит в  $V_1$ .

Наконец, учитывая лемму 7, можем написать:

$$\mathcal{L}(M) \geq \sum_{a=0}^A \mu(a) + \sum_{a=0}^B \mu(-a),$$

где  $A$  — число образов листьев слева от образа корня,  $B$  — справа. Учитывая очевидные соотношения  $\mu(2^n - a) \leq \mu(-a) + 1$  и  $A + B \geq 2^n - 1$ , можем записать:

$$\mathcal{L}(M) \geq \sum_{a=0}^{2^n-1} \mu(a) - 2^n \gtrsim \frac{n}{3} 2^n.$$

Перейдём теперь к двусторонним вложениям. Основным путём двустороннего вложения  $M$  двоичного дерева  $D$  назовём путь (в этом дереве), соединяющий два различных листа, при удалении которого получаются поддеревья (назовём их основными), вложения которых являются односторонними. Под удалением пути подразумевается удаление всех вершин, лежащих на нём, вместе со всеми инцидентными рёбрами.

**Лемма 9.** *У произвольного вложения  $M$  произвольного двоичного дерева  $D$  существует основной путь.*

**Доказательство.** Если  $M$  является односторонним, то достаточно выбрать произвольный путь. Пусть  $M$  имеет образы листьев на обеих сторонах решётки. Пусть  $a$  — лист, чей образ находится на верхней стороне решётки и имеет минимальную абсциссу среди всех листьев на этой стороне, а  $b$  — лист, чей образ находится на нижней стороне и имеет максимальную абсциссу среди всех листьев на этой стороне. Рассмотрим путь  $C$ , соединяющий  $a$  и  $b$ . Его образ разделяет решётку на две части, причём образы листьев нижней стороны решётки лежат в одной области, а верхней — в другой. Поэтому любое дерево, получающееся после удаления пути  $C$ , будет иметь образы листьев только на одной стороне решётки.

**Теорема 4.** *Для минимальной площади  $S(n)$  решётки, допускающей двустороннее вложение дерева  $D_n$ , при  $n \rightarrow \infty$  верно асимптотическое неравенство*

$$S(n) \gtrsim \frac{n}{3} 2^n.$$

**Доказательство.** Фиксируем  $n$  и рассмотрим оптимальное вложение  $M_n$  дерева  $D_n$ . Удалим в нём основной путь, а также пути от концов основного пути до корня дерева. Тогда все получившиеся поддеревья будут полными,

причём для каждого  $n' = 1, \dots, n - 1$  найдётся либо одно дерево глубины  $n'$ , либо два дерева глубины  $n' - 1$ . Фиксируем произвольное  $n'$  и выпишем, пользуясь леммой 8, следующее неравенство:

$$\mathcal{L}(M_n) \gtrsim \frac{n-2}{3}2^{n-1} + \dots + \frac{n'-1}{3}2^{n'} \sim \frac{n}{3}2^n(1 - 2^{-n'}).$$

В силу произвольности  $n'$  получаем утверждение теоремы.

### Литература

1. *H. de Fraysseix, J. Pach, R. Pollack* How to draw a planar graph on a grid // *Combinatorica*, 10:1 (1990), P. 41–51.
2. *W. Schnyder* Embedding planar graphs on the grid // 1st ACM-SIAM Sympos. Discrete Algorithms, 1990, P. 138–148.
3. *R. Kramer, J. van Leeuwen* The complexity of wire-routing and finding minimum area layouts for arbitrary VLSI circuits // F. P. Preparata (ed.), *Advances in Computing Research*, 2, JAI Press, 1984, P. 129–146.
4. *M. Formann, F. Wagner* The VLSI layout problem in various embedding models // Möhring R.H. (ed.), *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science. WG 1990. Lecture Notes in Computer Science*, 484, Springer, Berlin, Heidelberg.
5. *J. Storer* On minimal node cost planar embeddings // *Networks*, 14 (1984), P. 181–212.
6. *Th. Lengauer* Combinatorial algorithms for integrated circuit layout // John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1990.
7. *M. Schöffter* Drawing graphs on rectangular grids // *Discrete Applied Mathematics*, 63:1 (1995), P. 75–89.
8. *С.А. Ложкин, Л.И. Высоцкий* О некоторых асимптотически оптимальных односторонних вложениях деревьев подобных формул в плоские прямоугольные решетки // *Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика*, 2 (2017), С. 38–45.
9. *S. Lee, H. Choi* Link-disjoint embedding of complete binary trees in meshes // *Networks*, 30 (1998), P. 283–292.
10. *С.А. Ложкин, Ли Да Мин* О некоторых оптимальных вложениях двоичных и троичных деревьев в плоские прямоугольные решётки // *Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика*, 4 (1995), С. 49–55.
11. *Н.И. Чернова* Теория вероятностей: Учебное пособие. Новосибирский гос. ун-т, Новосибирск, 2007.

12. *G. W. Reitwiesner* Binary Arithmetic. *Advances in Computers*, Elsevier, Vol. 1 (1960) P. 231–308.