

*Е.В. Захаров, А.В. Калинин*

### МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА ПОВЕРХНОСТИ СЕРДЕЧНОЙ МЫШЦЫ\*

Обратная задача электрокардиографии в форме потенциалов – это задача реконструкции потенциала на внешней поверхности сердца по измерениям потенциала на поверхности грудной клетки [1]. Актуальность данной обратной задачи связана с внедрением в клиническую практику новых методов лечения аритмий сердца.

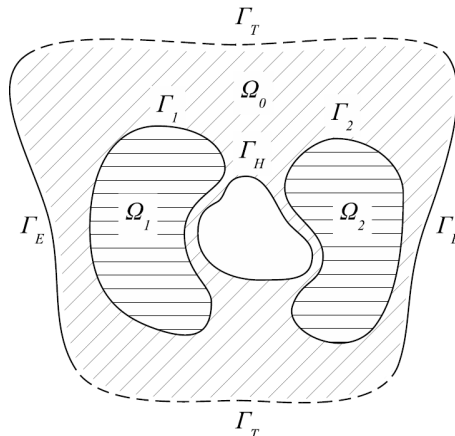


Рис. 1. Область  $\Omega$ .

В [2] были рассмотрены алгоритмы решения обратной задачи электрокардиографии для модельной геометрии торса и сердца, в [3] учитывалась реальная геометрия, но предполагалось, что грудная клетка однородна, в [4, 5] рассмотрена обратная задача электрокардиографии с учетом внутренней неоднородности грудной клетки, а в [6] был предложен итерационный алгоритм, направленный на повышение точности и скорости вычислительного процесса. Во всех рассмотренных выше работах решалась задача определения потенциала электрического поля на внешней поверхности сердца. Но, по данным ряда клинических исследований, для целей точной диагностики сложных случаев аритмий сердца анализа только потенциала электрического поля сердца недостаточно. В работе [7] показано, что модуль градиента потенциала является важной характери-

---

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 11-01-00259

стикой, позволяющей более точно оценить электрофизиологическое состояние сердца.

Таким образом, целью данной работы является разработка численного алгоритма решения обратной задачи электрокардиографии в среде с кусочно-постоянным коэффициентом электропроводности, позволяющего одновременно определять на поверхности сердца как потенциал, так и его градиент. Это означает, что на поверхности сердца необходимо найти вектор напряженности электрического поля  $\vec{E} = -\text{grad } u$ .

Рассмотрим область  $\Omega$  в пространстве  $R^3$ , ограниченную снаружи замкнутой поверхностью  $\Gamma_B$ , а изнутри замкнутой поверхностью  $\Gamma_H$  (см. рис. 1). Поверхность  $\Gamma_B$  представляет собой объединение двух поверхностей  $\Gamma_T$  и  $\Gamma_E$ . В  $\Omega$  заданы непересекающиеся области  $\Omega_i \subset \Omega$  с границами  $\Gamma_i, i = 1, 2$ . Интерпретация данной геометрической конфигурации следующая:  $\Gamma_H$  – поверхность сердца,  $\Gamma_E$  – часть поверхности торса, на которой производятся измерения потенциала электрического поля,  $\Gamma_T$  – верхний и нижний срезы торса,  $\Omega_i, i = 1, 2$ , – области неоднородности грудной клетки человека (левое и правое легкие).

Определим  $\Omega_0 = \Omega \setminus (\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2)$ ,  $\Gamma_0 = \Gamma_E$ ,  $\Gamma_3 = \Gamma_H \cup \Gamma_T$ . Обратную задачу электрокардиографии сформулируем так. Требуется найти  $u(x), x \in \bar{\Omega}$ , такую, что  $u(x) = u_i(x), x \in \bar{\Omega}_i, i = 0, 1, 2$ ,

$$\Delta u_i(x) = 0, x \in \Omega_i, i = 0, 1, 2, \quad (1)$$

$$u_0(x) = \psi(x), x \in \Gamma_0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_0(x)}{\partial n} = 0, x \in \Gamma_0, \quad (3)$$

$$u_0(x) = u_i(x), x \in \Gamma_i, i = 1, 2, \quad (4)$$

$$\sigma_0 \frac{\partial u_0(x)}{\partial n} = \sigma_i \frac{\partial u_i(x)}{\partial n}, x \in \Gamma_i, i = 1, 2, \quad (5)$$

где  $\psi(x)$  – известная функция, полученная в результате измерений на поверхности торса,  $\sigma_i, i = 0, 1, 2$  – заданные положительные постоянные, определяющие коэффициент электрической проводимости ткани, занимающей область  $\Omega_i$ .

Для целей анализа электрофизиологического состояния сердца потенциал  $\psi(x)$  на поверхности грудной клетки регистрируется в нескольких последовательных моментах времени  $t_0, t_1, \dots, t_T$ . Для каждого такого момента времени решается обратная задача электрокардиографии (1)–(5) и восстанавливается функция  $u_0(x, t), x \in \Gamma_H$  – потенциал на поверхности сердца. Анализ электрофизиологического состояния сердца заключается в поиске особых точек функции  $u_0(x, t), x \in \Gamma_H$ . В работе [7] был предложен алгоритм поиска таких особых точек, основанный на вычислении мо-

дуля градиента функции. Поэтому наряду с решением задачи (1)–(5) поставим задачу определения вектора  $\nabla u_0(x)$ ,  $x \in \Gamma_H$  и величины

$$\nabla_{\Gamma_H} u_0(x) = \nabla u_0(x) - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla u_0(x)), x \in \Gamma_H, \quad (6)$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к поверхности  $\Gamma_H$ .

Алгоритм решения обратной задачи электрокардиографии (1)–(5), рассмотренный в работе [5], был основан на методе граничных интегральных уравнений. Для областей  $\Omega_0$ ,  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  записывались два интегральных соотношения

$$c_P u_l(P) = \sum_{i=0}^3 \left( \int_{\Gamma_i} q_i(Q) G(P, Q) - u_i(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} \right) dS_Q, \quad (7)$$

$$P \in \Gamma_l, l = 0, 1, 2, 3,$$

$$-c_P u_l(P) = \frac{\sigma_0}{\sigma_l} \left( \int_{\Gamma_l} q_l(Q) G(P, Q) - u_l(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} \right) dS_Q, \quad (8)$$

$$P \in \Gamma_l, l = 1, 2,$$

где  $P$  и  $Q$  – точки, лежащие на соответствующих границах  $\Gamma_l$ ,  $G(P, Q)$  – фундаментальное решение уравнения Лапласа:

$$G(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|P - Q|}, \quad (9)$$

через  $u_l$  обозначены значения функции  $u_0(x)$  на поверхности  $\Gamma_l$ , через  $q_l$  значения нормальной производной функции  $u_0(x)$  на поверхности  $\Gamma_l$ ,  $c_P$  – коэффициент, зависящий от телесного угла в точке  $P$ . После дискретизации данных соотношений и учета условий (2)–(5) строилась и решалась система линейных алгебраических уравнений.

Следуя рассмотренному выше методу граничных интегральных уравнений, рассмотрим способ вычисления градиента функции  $u_0$  на поверхности  $\Gamma_H$ . Для потенциала  $u_0(x)$ ,  $x \in \Gamma_H$  в области  $\Omega_0$  с границей  $\partial\Omega = \Gamma_T \cup \Gamma_H \cup \Gamma_E \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  выполняется третья формула Грина

$$c_P u_0(P) = \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u_0(Q)}{\partial n} G(P, Q) - u_0(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} \right) dS_Q, P \in \Gamma_H. \quad (10)$$

Обозначим  $e_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  единичные координатные векторы вдоль осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно. Продифференцируем (10) вдоль направлений  $e_k$ :

$$c_P \frac{\partial u_0(P)}{\partial e_k} = \frac{\partial}{\partial e_k} \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u_0(Q)}{\partial n} G(P, Q) - u_0(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} \right) dS_Q, \quad (11)$$

$$P \in \Gamma_H, k = 1, 2, 3.$$

При совпадении точек  $P$  и  $Q$  интегралы с ядром  $G(P, Q)$  и  $\frac{\partial G(P, Q)}{\partial n}$  являются несобственными. Интеграл с ядром  $G(P, Q)$  имеет слабую особенность и существует для точек  $P = Q$ , а интеграл с ядром  $\frac{\partial G(P, Q)}{\partial n}$  заменим его главным значением по Коши

$$\int_{\partial\Omega} u_0(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} dS_Q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_\varepsilon} u_0(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} dS_Q. \quad (12)$$

Теперь операцию дифференцирования по направлениям  $e_k$  в (11) можно внести по знак интеграла

$$c_P \frac{\partial u_0(P)}{\partial e_k} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_0(Q)}{\partial n} \frac{\partial G(P, Q)}{\partial e_k} dS_Q - \int_{\partial\Omega} u_0(Q) \frac{\partial^2 G(P, Q)}{\partial n \partial e_k} dS_Q, \quad (13)$$

$P \in \Gamma_H, k = 1, 2, 3.$

Так как после решения обратной задачи электрокардиографии известны значения функций  $u_0(x)$  и  $\frac{\partial u_0(x)}{\partial n}$ , то вычисляя правую часть в (13), получаем значения компонентов градиента  $\frac{\partial u_0(x)}{\partial e_k}$  на поверхности  $\Gamma_H$ . При этом сингулярный интеграл с ядром  $\frac{\partial G(P, Q)}{\partial e_k}$  заменяется на его главное значение по Коши, а для гиперсингулярного интеграла с ядром  $\frac{\partial^2 G(P, Q)}{\partial n \partial e_k}$  берется его конечное значение по Адамару. Но этот подход встречает существенные трудности, связанные с точным вычислением данных интегралов.

Значительно упростить процедуру вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов помогает иное определение главного значения по Коши как предела стремления точки  $P$  к поверхности  $\partial\Omega$  вдоль внутренней нормали

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} u_0(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} dS_Q &= \lim_{P_I \rightarrow P} \int_{\partial\Omega} u_0(Q) \frac{\partial G(P_I, Q)}{\partial n} dS_Q = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega} u_0(Q) \frac{\partial G(P - \varepsilon n, Q)}{\partial n} dS_Q \end{aligned} \quad (14)$$

или вдоль внешней нормали

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} u_0(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} dS_Q &= \lim_{P_E \rightarrow P} \int_{\partial\Omega} u_0(Q) \frac{\partial G(P_E, Q)}{\partial n} dS_Q = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega} u_0(Q) \frac{\partial G(P + \varepsilon n, Q)}{\partial n} dS_Q \end{aligned} \quad (15)$$

В работе [8] было доказано, что определения (15) и (14) эквивалентны определению (12). Тогда выражение (11) можно представить в виде

$$\frac{\partial u_0(P)}{\partial e_k} = \lim_{P_I \rightarrow P} \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u_0(Q)}{\partial n} \frac{\partial G(P_I, Q)}{\partial e_k} - u_0(Q) \frac{\partial^2 G(P_I, Q)}{\partial n \partial e_k} \right) dS_Q, \quad (16)$$

$P \in \Gamma_H, k = 1, 2, 3,$

если используется определение (14) или в виде

$$0 = \lim_{P_E \rightarrow P} \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u_0(Q)}{\partial n} \frac{\partial G(P_E, Q)}{\partial e_k} - u_0(Q) \frac{\partial^2 G(P_E, Q)}{\partial n \partial e_k} \right) dS_Q, \quad (17)$$

$P \in \Gamma_H, k = 1, 2, 3,$

если используется определение (15).

В работе [9] подход, основанный на данных формулировках, был существенно развит по двум направлениям. Прежде всего, была высказана идея рассмотреть разность выражений (16) и (17):

$$\frac{\partial u_0(P)}{\partial e_k} = \left\{ \lim_{P_I \rightarrow P} - \lim_{P_E \rightarrow P} \right\} \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u_0(Q)}{\partial n} \frac{\partial G}{\partial e_k} - u_0(Q) \frac{\partial^2 G}{\partial n \partial e_k} \right) dS_Q, P \in \Gamma_H, k = 1, 2, 3. \quad (18)$$

Здесь используются обозначения, введенные в работе [9]. Основное преимущество формулировки (18) заключается в том, что те интегралы, которые непрерывно пересекают поверхность  $\partial\Omega$  равны нулю. Поэтому для вычисления градиента остается рассмотреть только сингулярные и гиперсингулярные интегралы.

Следующая идея, изложенная в работе [9], заключалась в том, что для вычисления компонентов градиента строилось интегральное уравнение, основанное на проекционном методе Галеркина

$$\int_{\partial\Omega} \phi_j(P) \frac{\partial u_0(P)}{\partial e_k} dS_P = \left\{ \lim_{P_I \rightarrow P} - \lim_{P_E \rightarrow P} \right\} \int_{\partial\Omega} \phi_j(P) \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u_0(Q)}{\partial n} \frac{\partial G}{\partial e_k} - u_0(Q) \frac{\partial^2 G}{\partial n \partial e_k} \right) dS_Q dS_P, \quad (19)$$

$P \in \Gamma_H, k = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, N,$

где  $\phi_j(P)$  – интерполирующие базисные функции. Использование проекционного метода Галеркина позволяет существенно упростить вычисление сингулярных и гиперсингулярных интегралов, получая для ряда случаев простые аналитические выражения.

В результате, численный алгоритм решения задачи выглядит так. Каждая поверхность  $\Gamma_l$  приближается полигональной поверхностью  $\hat{\Gamma}_l, l = 1, 2, 3,$  состоящей из плоских треугольников. Каждый такой тре-

угольник называется граничным элементом. В каждом элементе вводятся интерполирующие базисные функции  $\phi_j(x), j = 1, 2, \dots, N$ , потенциал и нормальная производная приближенно представляются в виде разложения по системе базисных функций. Подставляя приближенные значения потенциала и нормальной производной в соотношения (7), (8) и используя известные граничные условия, приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения по системе базисных функций. Для вычисления компонентов градиента используется интегральное уравнение (19).

Рассмотрим ряд численных экспериментов для проверки изложенных выше алгоритмов. Детали численной реализации метода граничных интегральных уравнений следующие:

- полигональная сетка состояла из плоских треугольников;
- использовались линейные граничные элементы с узлами, расположенными в вершинах треугольников;
- нормаль в вершине треугольника усреднялась;
- для вычисления интегралов от произведения фундаментального решения на базисные функции в элементах, в которых точки коллокации и интегрирования не совпадают, использовались квадратурные формулы Гаусса 4 порядка;
- для вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов использовались аналитические выражения, полученные в работе [9].

В первом численном эксперименте задавалась геометрия области, состоящая из двух сфер с радиусами  $R_1 = 100$  и  $R_2 = 50$ . Задавалась гармоническая функция

$$u(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - z^2 \quad (20)$$

с известным градиентом

$$\text{grad } u(x, y, z) = (x, y, -2z). \quad (21)$$

В каждом узле полигональной сетки с использованием изложенного выше алгоритма численно вычислялся градиент функции  $u_0(x)$ , сравнивался с аналитическим значением и вычислялась относительная ошибка. Результаты численного эксперимента приведены в таблице 1, даны значения минимальной относительной ошибки, максимальной и средней по всем узлам.

Таблица 1. Результаты первого численного эксперимента

№	Число узлов/элементов	$\varepsilon$ , min	$\varepsilon$ , max	$\varepsilon$ , average	Время расчета, с
1	136/268	0.0098	0.0676	0.0328	6.02
2	274/544	0.0049	0.0645	0.0195	12.29
3	752/1500	0.0011	0.0452	0.0092	35.28
4	1518/3032	0.0006	0.0307	0.0062	76.33
5	2502/5000	0.0005	0.0225	0.0047	134.22

Во втором численном эксперименте использовалась реальная геометрия сердца. В области  $\Omega_0$  также задавалась аналитическая функция

$$u(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - z^2 \quad (22)$$

с градиентом

$$\text{grad } u(x, y, z) = (x, y, -2z). \quad (23)$$

и в каждом узле полигональной сетки численно вычислялся градиент функции  $u_0(x)$ , сравнивался с аналитическим значением и вычислялась относительная ошибка. Результаты численного эксперимента приведены в таблице 2, даны значения минимальной относительной ошибки, максимальной и средней по всем узлам.

Таблица 2. Результаты второго численного эксперимента

№	Число узлов/элементов	$\varepsilon$ , min	$\varepsilon$ , max	$\varepsilon$ , average	Время расчета, с
1	247/490	0.0013	0.1837	0.0210	11.04
2	504/1004	0.0005	0.1287	0.0172	23.19
3	1023/2042	0.0006	0.3148	0.0161	48.79
4	1542/3080	0.0002	0.1809	0.0127	75.52
5	2585/5166	0.0004	0.1982	0.0110	139.67

В третьем численном эксперименте использовалась реальная геометрия торса и сердца. На поверхности  $\Gamma_3$  задавался потенциал электрического поля  $\varphi(x)$ , соответствующий потенциалу, создаваемому квадруполем, расположенным внутри сердца в его геометрическом центре. С этим значением потенциала решалась прямая задача электрокардиографии [5] и вычислялся потенциал  $\psi(x)$  на поверхности  $\Gamma_0$ . В потенциал на поверхности  $\Gamma_0$  вносилась погрешность, в результате чего получалась функция  $\psi_\delta(x)$ , с которой решалась обратная задача (1)–(5). Прямая и обратные задачи решались для кусочно-однородной модели грудной клетки  $\sigma_0 = 1$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 5$ . После решения обратной задачи электрокардиографии на по-

верхности вычислялся градиент и сравнивался с аналитическим значением градиента потенциала квадруполья. Результаты численного эксперимента приведены в таблице 3, даны значения минимальной относительной ошибки, максимальной и средней по всем узлам.

Таблица 3. Результаты третьего численного эксперимента

№	Число узлов/элементов	$\epsilon$ , min	$\epsilon$ , max	$\epsilon$ , average	Время расчета, с
1	247/490	0.0205	0.3212	0.0510	11.02
2	504/1004	0.0055	0.2576	0.0432	23.25
3	1023/2042	0.0112	0.3521	0.0398	48.12
4	1542/3080	0.0025	0.2243	0.0291	74.99
5	2585/5166	0.0019	0.2498	0.0251	139.15

В заключение рассмотрим результаты применения изложенных выше алгоритмов для определения процессов активации миокарда. В этом эксперименте использовалась реальная геометрия торса и сердца, полученная по результатам компьютерного томографического исследования. Потенциал электрического поля сердца регистрировался на поверхности грудной клетки в нескольких последовательных моментах времени  $t_0, t_1, \dots, t_T$ . Для каждого такого момента времени решалась обратная задача электрокардиографии (1)–(5), вычислялся потенциал электрического поля сердца  $u_0(x)$  и его поверхностный градиент  $\nabla_{\Gamma_H} u_0(x)$ . За направление фронта активации в каждой точке сердце принималось направление вектора градиента с максимальным модулем среди значений, вычисленных в моменты времени  $t_0, t_1, \dots, t_T$ . Результаты расчета приведены на рис. 2, черной точкой отмечена локализация аритмогенного очага.

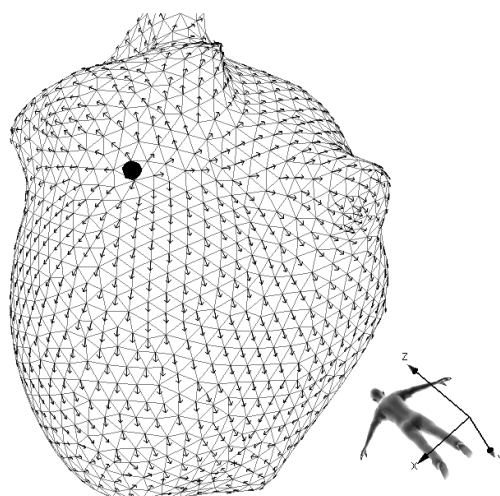


Рис. 2. Процесс активации миокарда.



По результатам вычислительных экспериментов можно сделать вывод, что алгоритм реконструкции градиента потенциала сердца по данным решения обратной задачи электрокардиографии работает с достаточной точностью и скоростью. Это позволяет использовать его для новых методов оценки электрофизиологического состояния сердца.

## Литература

1. Барр Р., Спэк М. Решения обратной задачи, выраженные непосредственно в форме потенциала. М.: Медицина, 1979.
2. Денисов А.М., Захаров Е.В., Калинин А.В., Калинин В.В. Применение метода регуляризации Тихонова для численного решения обратной задачи электрокардиографии // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика. 2008. № 2. С. 5–10.
3. Денисов А.М., Захаров Е.В., Калинин А.В., Калинин В.В. Численные методы решения некоторых обратных задач электрофизиологии сердца // Дифференц. ур-ния. 2009. Т. 45. № 7. С. 1014–1022.
4. Захаров Е.В., Калинин А.В. Численное решение трехмерной задачи Дирихле в кусочно-однородной среде методом граничных интегральных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 7. С. 1197–1206.
5. А. М. Денисов, Е. В. Захаров, А. В. Калинин, В. В. Калинин. Численное решение обратной задачи электрокардиографии для среды с кусочно-постоянным коэффициентом электропроводности // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. № 7. С. 1233-1239.
6. Калинин А.В. Итерационный алгоритм решения обратной задачи электрокардиографии для среды с кусочно-постоянным коэффициентом электропроводности. // Прикладная математики и информатика. Из-во МГУ. 2010. N 34. С. 35-40.
7. Punske B.B., Nu Q., Lux R. L., MacLeod R. S., et al. Spatial Methods of Epicardial Activation Time Determination in Normal Hearts // Annals of Biomedical Engineering. 2003. Vol. 31. pp. 781-792.
8. Захаров Е.В., Давыдов А.Г., Халеева И.В. Интегральные уравнения с ядрами типа Адамара в задачах дифракции. В кн. Актуальные вопросы прикладной математики. М. Изд-во МГУ. 1989. С. 118-127.
9. A. Sutradhar, G. H. Paulino, L. J. Gray Symmetric Galerkin Boundary Element Method. 2008. Springer.