Е. В. Захаров, А. В. Калинин

АЛГОРИТМЫ РАСЧЕТА И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПОЛЕЙ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ*

1. Введение

Задачи расчета полей постоянных токов в кусочно-однородной среде встречаются в различных областях естествознания. Они возникают в теории электроразведки на постоянном токе [1, 2], при моделировании электротехнических систем [3] и при исследовании биоэлектрических явлений [4, 5, 6].

В данной работе изучается метод граничных интегральных уравнений для численного расчета полей постоянных токов в трехмерных областях, заполненных кусочно-однородной средой. Дана постановка задачи и построена система интегральных уравнений Фредгольма I рода.

Детально рассматриваются вычислительные алгоритмы и схемы решения задачи, включающие:

- построение расчетных поверхностей;
- триангуляцию;
- вычисление поверхностных интегралов;
- построение и решение системы блочно-матричных уравнений.

Приведены результаты вычислительных экспериментов.

2. Постановка задачи

Рассмотрим область $\Omega = \Omega_0 \cup \ldots \cup \Omega_N$ в R^3 (рис. 1). Границы Γ_i областей Ω_i $(i = 0,1,\ldots N)$ достаточно гладкие (поверхности Ляпунова). Поставим следующую задачу.

Требуется найти функцию $u(x)$ такую, что $u \in C(\overline{\Omega})$; $u(x) = u_i(x)$, $x \in \Omega_i$ $(i = 0,1,\ldots N)$, где $u_i \in C^2(\Omega_i) \cap C^1(\overline{\Omega}_i)$ и

$$\Delta u_i(x) = 0,\ x \in \Omega_i, i = 0,1,\ldots N, \tag{1}$$

$$u_0(x) = U_0(x), x \in \Gamma_0, U_0(x) \in C(\Gamma_0). \tag{2}$$

На границах Γ_i $(i = 0,1,\ldots N)$ выполняются условия сопряжения

$$u_0(x) = u_i(x), x \in \Gamma_i,\ i = 1,2,\ldots,N, \tag{3}$$

$$k_0 \frac{\partial u_0(x)}{\partial n} = k_i \frac{\partial u_i(x)}{\partial n}, x \in \Gamma_i, i = 1,2,\ldots,N. \tag{4}$$

---

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 08–01–00314

Параметры k_i $(i = 0,1,\ldots,N)$ положительны и конечны.

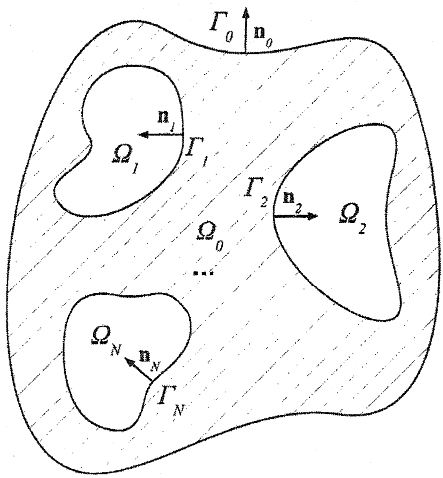


Рис. 1. Область Ω

3. Построение системы интегральных уравнений Фредгольма I рода

Для области Ω_0 с многосвязной границей $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_N$ и внешним направлением нормалей, используя третью формулу Грина и условие сопряжения (3), можно записать $N+1$ уравнение

$$2\pi u_i(x) = \sum_{j=0}^{N}\left(\int_{\Gamma_j} q_j^+(y)\frac{1}{|x-y|}ds_y - \int_{\Gamma_j} u_j(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}ds_y \right), \tag{5}$$

где $i = 0,1,\ldots N$, $x \in \Gamma_i$ – точки коллокации, $y \in \Gamma_j$ – точки интегрирования, $|x-y|$ – расстояние между точками x и y, $q_j^+(y) = \dfrac{\partial u_0(y)}{\partial n_y}$.

В свою очередь, для каждой области Ω_i с односвязной границей Γ_i и внутренним направление нормалей можно записать следующие N граничных интегральных уравнения

$$-2\pi u_i(x) = \int_{\Gamma_i} q_i^-(y)\frac{1}{|x-y|}ds_y - \int_{\Gamma_i} u_i(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}ds_y, \tag{6}$$

где $i=1,2,\ldots N$, $x\in\Gamma_i$ – точки коллокации, $y\in\Gamma_i$ – точки интегрирования, $|x-y|$ – расстояние между точками x и y, $q_i^-(y)=\dfrac{\partial u_i(y)}{\partial n_y}$. С учетом условия сопряжения (4) верно

$$q_i^-(y)=\frac{k_0}{k_i}q_i^+(y), i=1,2,\ldots N, y\in\Gamma_i,$$

и уравнение (6) можно записать в виде

$$-2\pi u_i(x)=\int_{\Gamma_i}\frac{k_0}{k_i}q_i^+(y)\frac{1}{|x-y|}ds_y-\int_{\Gamma_i}u_i(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}ds_y, i=1,2,\ldots N. \quad (7)$$

Объединяя (5) и (7), получим систему интегральных уравнений Фредгольма I рода

$$\begin{cases} 2\pi u_i(x)=\sum\limits_{j=0}^{N}\left(\int_{\Gamma_j}q_j^+(y)\frac{1}{|x-y|}ds_y-\int_{\Gamma_j}u_j(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}ds_y\right), \\ \qquad\qquad x\in\Gamma_i, i=0,1,\ldots,N, \\ -2\pi u_i(x)=\int_{\Gamma_i}\frac{k_0}{k_i}q_i^+(y)\frac{1}{|x-y|}ds_y-\int_{\Gamma_i}u_i(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}ds_y, \\ \qquad\qquad x\in\Gamma_i, i=1,2,\ldots,N. \end{cases} \quad (8)$$

Можно показать, что система интегральных уравнений (8) эквивалентна исходной задаче (1)-(4), она однозначно разрешима, если существует решение задачи (1)-(4), а ее решение может быть получено методом интерполяции и коллокаций [7, 8, 9].

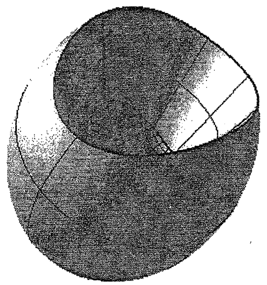
4. Этапы численного решения

Для численного решения системы интегральных уравнений (8) необходимы следующие этапы:

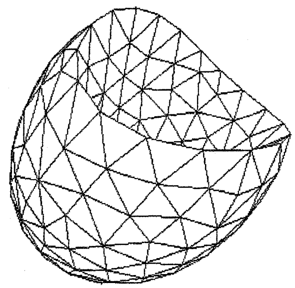
1. Построение и триангуляция поверхностей Γ_i, $i=0,1,\ldots N$.
2. Вычисление поверхностных интегралов.
3. Формирование и решение системы блочно-матричных уравнений.

Рассмотрим каждый из этих этапов отдельно. Поверхности Γ_i создавались в редакторе трехмерного поверхностного моделирования как совокупности связанных NURBS-поверхностей, ограничивающих замкнутый объем. Такой способ позволяет, с одной стороны, представить достаточно сложную поверхность, а, с другой стороны, позволяет сохранить преимущества аналитического описания поверхности.

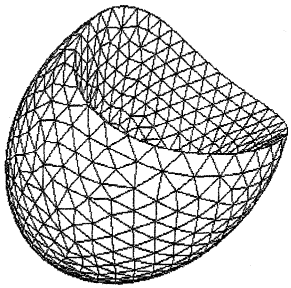
Представление в виде NURBS-поверхностей также позволяет применять алгоритмы автоматического построения триангуляционной расчетной сетки. В работе использовался алгоритм распространяющегося фронта (Advancing Front Triangulation), который позволяет управлять числом граничных элементов в расчетной сетке и создает треугольники достаточно близкие к равносторонним [10]. Результаты автоматической триангуляции NURBS-поверхности приведены на рис. 2.



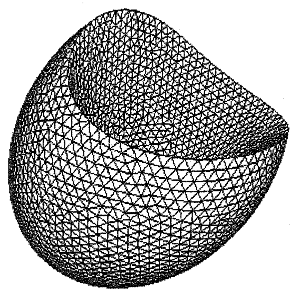
а) Исходная NURBS модель



б) Сетка из 450 элементов



в) Сетка из 1500 элементов



в) Сетка из 7500 элементов

Рис. 2. Построение расчетной сетки для поверхностей Γ_i.

После триангуляции каждая поверхность Γ_i представлена в виде совокупности граничных элементов $ds_p : \Gamma_i = ds_1 \cup ds_2 \cup \ldots \cup ds_m$. Следуя [11] перейдем к дискретному представлению системы (8).

Введем систему из m линейно независимых базисных элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ (характеристических функций), определенных следующим образом

$$\begin{cases} \varphi_p(s) = 1, & s \in ds_p, \\ \varphi_p(s) = 0, & s \notin ds_p. \end{cases}$$

Значение функции $u(x)$ и ее нормальной производной представим в виде разложения по системе базисных функций φ_p (кусочно-постоянная аппроксимация)

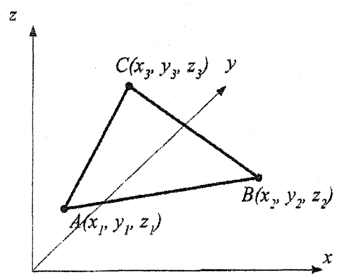
$$u(s)=\sum_{p=1}^{m}\alpha_p\cdot\varphi_p(s),$$
$$q(s)=\sum_{p=1}^{m}\beta_p\cdot\varphi_p(s), \tag{9}$$

где α_p – значение $u(s)$, β_p – значение $q(s)$ в центре тяжести p-го граничного элемента.

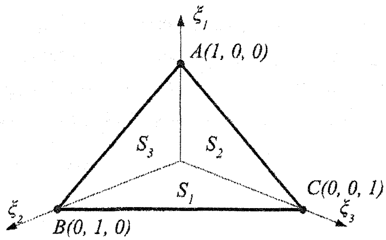
Далее для каждого граничного элемента ABC необходимо вычислить интегралы вида

$$\int_{\Gamma_j}\frac{1}{|x-y|}ds_y,\quad x\in\Gamma_i, \tag{10}$$

$$\int_{\Gamma_j}\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}ds_y,\quad x\in\Gamma_i, \tag{11}$$



а) Декартовый базис



б) Естественный базис треугольника

Рис. 3. Преобразование координат точки интегрирования.

Пусть

$$L=W^{-1}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{bmatrix}^{-1}$$

аффинное преобразование декартовых координат (x,y,z) произвольной точки внутри треугольника в координаты (ξ_1,ξ_2,ξ_3) в естественном базисе треугольника ABC, где (x_1,y_1,z_1) – координаты точки A, (x_2,y_2,z_2) – координаты точки B, (x_3,y_3,z_3) – координаты точки C, $\xi_1+\xi_2+\xi_3=1$ (см. рис. 3).

При помощи замены переменных

$$\xi_1 = \frac{1+\tau_1}{2}, \quad \xi_2 = \frac{(1-\tau_1)(1+\tau_2)}{4}$$

поверхностный интеграл по треугольнику ABC можно свести к двукратному интегрированию по переменным τ_1 и τ_2

$$\int\limits_{ABC} f(x,y,z)ds = \frac{S_{ABC}}{4}\int\limits_{-1}^{1}(1-\tau_1)\int\limits_{-1}^{1} f(\tau_1,\tau_2)d\tau_2 d\tau_1,$$

где S_{ABC} – площадь треугольника ABC.

Для численного вычисления данного интеграла можно применять симметричные квадратурные формулы Гаусса. В данной работе применялась симметричная схема Гаусса с 4-й степенью интерполирующего полинома [12].

В случае, когда точка коллокации x и точка интегрирования y совпадают, интегралы вида (10) и (11) имеют особенность, и непосредственно применять квадратурные формулы Гаусса нельзя. Для вычисления таких интегралов каждый граничный элемент ABC разбивался на три подэлемента OAB, OBC, OCA лучами, проходящими через вершины треугольника (точки A,B,C) и его центр тяжести (точка O), и для каждого такого подэлемента интегралы вычислялись отдельно. При использовании квадратурных формул Гаусса такой подход аналогичен введению дополнительных узлов интегрирования для треугольника ABC, соответствующих узлам интегрирования для каждого подэлемента OAB, OBC, OCA.

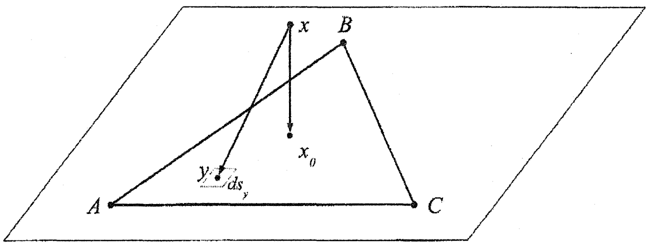


Рис. 4. Вычисление интеграла с особенностью

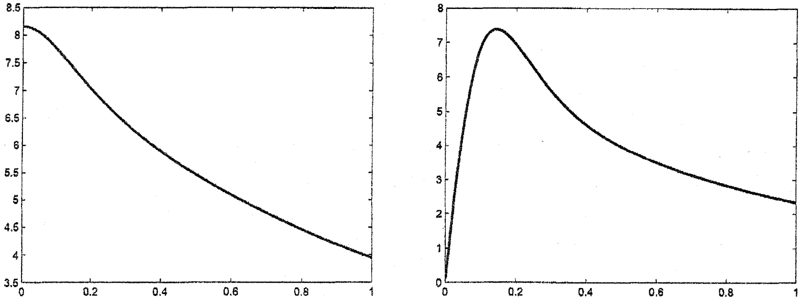
Таким образом, при вычислении интегралов без особенностей в ядре применялась симметричная схема Гаусса с 4-й степенью интерполирующего полинома, а при вычислении интегралов с особенностью применялась модифицированная симметричная схема Гаусса с дополнительными узлами интегрирования.

Для оценки точности интегрирования по приведенной выше схеме, рассмотрим следующие функции (см. рис. 4)

$$f(|x-x_0|)=\int\limits_{ABC}\frac{1}{|x-y|}ds_y,\quad y\in ABC, \tag{12}$$

$$f(|x-x_0|)=\int\limits_{ABC}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|x-y|}ds_y,\qquad y\in ABC, \tag{13}$$

где x_0– центр тяжести треугольника ABC, $|x-x_0|$ – расстояние от точки x до x_0. Таким образом, для каждой точки x вычисляется расстояние $|x-x_0|$ и значение поверхностных интегралов с ядрами $\frac{1}{|x-y|}$ и $\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|x-y|}$. Графики этих функций приведены на рис. 5. По оси x отложено расстояние $|x-x_0|$, по оси y – значения интегралов.



а) $f(|x-x_0|)=\int\limits_{ABC}\frac{1}{|x-y|}ds_y$ б) $f(|x-x_0|)=\int\limits_{ABC}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|x-y|}ds_y$

Рис. 5. Оценка точности вычисления поверхностных интегралов

После вычисления поверхностных интегралов система интегральных уравнений (8) в дискретном виде будет записана как

$$\begin{cases} 2\pi u_i=\sum\limits_{j=0}^{N}\left(G_{ij}q_j^+-\widetilde{H}_{ij}u_j\right), & i=0,1,\dots,N,\\ -2\pi u_i=\left(\dfrac{k_0}{k_i}G_{ii}q_i^+-\widetilde{H}_{ii}u_i\right), & i=1,2,\dots,N, \end{cases} \tag{14}$$

где матрицы G_{ij} получены в результате дискретизации интегралов вида

$$\int\limits_{\Gamma_j}\frac{1}{|x-y|}ds_y,\quad x\in\Gamma_i, \tag{15}$$

матрицы $\widetilde{H}_{ij}$ получены в результате дискретизации интегралов вида

$$\int_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} ds_y, \qquad x \in \Gamma_i, \tag{16}$$

Матрицы H_{ij}^{+} и H_{ij}^{-} определим как

$$H_{ij}^{+} = \begin{cases} \widetilde{H}_{ij}, & i \neq j, \\ \widetilde{H}_{ij} + 2\pi E, & i = j, \end{cases}$$
$$H_{ij}^{-} = \begin{cases} \widetilde{H}_{ij}, & i \neq j, \\ \widetilde{H}_{ij} - 2\pi E, & i = j, \end{cases} \tag{17}$$

где E – единичная матрица. Тогда система (14) примет вид

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{N} H_{ij}^{+} u_j = \sum_{j=0}^{N} G_{ij} q_j^{+}, & i = 0,1,\ldots,N, \\ H_{ii}^{-} u_i = \dfrac{k_0}{k_i} G_{ii} q_i^{+}, & i = 1,2,\ldots,N. \end{cases} \tag{18}$$

Система (18) содержит $(2N+1)$ уравнение и $(4N+2)$ неизвестных. Получим из нее систему из $(N+1)$ уравнения с $(N+1)$ неизвестными.

Согласно вычислительным экспериментам, числа обусловленности матриц G_{ij} и H_{ij} равны

$$\kappa(G_{ij}) \approx \begin{cases} 10^1 - 10^2, & i = j \\ 10^{17} - 10^{20}, & i \neq j \end{cases},$$
$$\kappa(H_{ij}) \approx \begin{cases} 10^1 - 10^3, & i = j \\ 10^{17} - 10^{20}, & i \neq j \end{cases}. \tag{19}$$

Таким образом, матрицы G_{ii} и H_{ii}допускают прямое обращение. Но при этом нужно учитывать, что сумма по строкам матриц H_{ii} равна нулю. Поэтому для сокращения числа уравнений следует обращать матрицы G_{ii}. Соответственно преобразуем (18) к виду

$$\begin{cases} R_{01}u_1 + R_{02}u_2 + \ldots R_{0N}u_N = G_{00}q_0^{+} - H_{00}^{+}u_0 \\ R_{11}u_1 + R_{12}u_2 + \ldots R_{1N}u_N = G_{10}q_0^{+} - H_{10}^{+}u_0 \\ \ldots \\ R_{N1}u_1 + R_{N2}u_2 + \ldots R_{NN}u_N = G_{N0}q_0^{+} - H_{N0}^{+}u_0 \end{cases}, \tag{20}$$

где

$$R_{ij} = H_{ij}^{+} - \frac{k_j}{k_0} G_{ij} G_{jj}^{-1} H_{jj}^{-}, \qquad i = 0,1,\ldots,N, j = 1,2,\ldots,N., \tag{21}$$

Применяя заданные условия Дирихле (2) к (20), получим систему

$$
\begin{cases}
-G_{00}q_0^+ + R_{01}u_1 + R_{02}u_2 + \ldots + R_{0N}u_N = -c_0 \\
-G_{10}q_0^+ + R_{11}u_1 + R_{12}u_2 + \ldots + R_{1N}u_N = -c_1 \\
\ldots \\
-G_{N0}q_0^+ + R_{N1}u_1 + R_{N2}u_2 + \ldots + R_{NN}u_N = -c_N
\end{cases}, \tag{22}
$$

или в компактном виде

$$
\begin{bmatrix}
-G_{00} & R_{01} & R_{02} & \ldots & R_{0N} \\
-G_{10} & R_{11} & R_{12} & \ldots & R_{1N} \\
 & & & \ddots & \\
-G_{N0} & R_{N1} & R_{N2} & \ldots & R_{NN}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} q_0^+ \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -c_0 \\ -c_1 \\ -c_2 \\ \vdots \\ -c_N \end{bmatrix} \tag{23}
$$

где $c_i = H_{i0}^+ U_0$.

Классический подход в методе граничных элементов заключается в объединении блоков матрицы и свободных членов системы (23) в единую систему линейных уравнений $Ax = b$. Недостатком такого подхода является достаточно большие требования к ресурсам компьютера при решении задач большой размерности.

Альтернативным способом является применение итерационного метода Зейделя к блочно-матричной системе уравнений (23). В этом случае на каждой итерации последовательно находятся следующие приближения неизвестных величин $q_0^+, u_1, \ldots, u_N$.

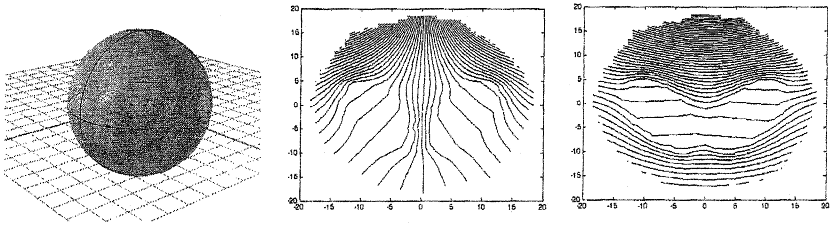
В результате, расчетный алгоритм состоит из следующих шагов:

1. Для каждой границы Γ_i выбирается направление нормалей, внешнее по отношению к области Ω_0 (см. рис. 1).
2. В редакторе трехмерного поверхностного моделирования создается каждая граница Γ_i как совокупность NURBS-поверхностей. После этого автоматически строится триангуляционная сетка при помощи алгоритма распространяющегося фронта.
3. Для каждой пары границ Γ_i, Γ_j формируются матрицы G_{ij} и $\widetilde{H}_{ij}$ путем численного вычисления поверхностных интегралов (10) и (11) с точками коллокации $x \in \Gamma_i$ и $y \in \Gamma_j$, точки берутся в центрах тяжести граничных элементов.
4. Вычисляются матрицы R_{ij} по формулам (17) и (21), применяются граничные условия Дирихле. Таким образом, формируется система блочно-матричных уравнений (23).
5. Полученная система решается либо путем прямого выражения неизвестных, либо итерационным методом Зейделя.

5. Некоторые численные результаты

Приведем численные результаты расчета полей постоянных токов для трехмерных кусочно-однородных областей.

Конфигурация первой области представлена на рис. 6а). Область Ω_0 с коэффициентом проницаемости $k_0 = 1$ имеет два включения с коэффициентами $k_1 = 5$ и $k_2 = 7$. Число граничных элементов в расчете было порядка 3000. На рисунках 6 б) и 6 в) представлены линии уровня потенциала на плоских сечениях $z = 0$ и $y = 0$.



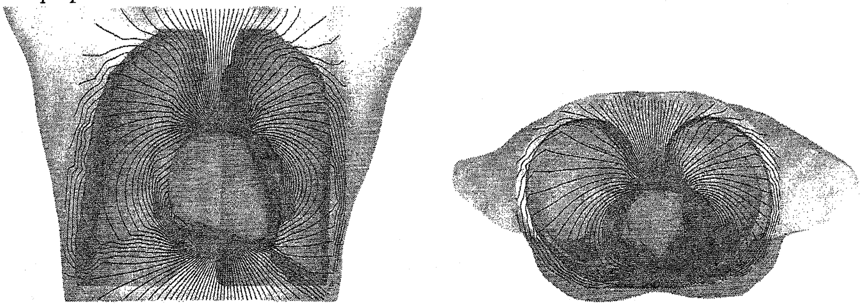
а) Исходная модель

б) Линии уровня на плоскости $y = 0$

в) Линии уровня на плоскости $z = 0$

Рис. 6. Результаты расчетов для области с двумя включениями

В качестве второй расчетной области бралась реальная геометрия торса, сердца и легких человека. Геометрия была построена в системе поверхностного трехмерного моделирования по данным компьютерной томографии.



а) Линии уровня на плоскости $y = 0$

б) Линии уровня на плоскости $z = 0$

Рис. 7. Результаты расчетов для реалистичной геометрии торса, сердца и легких человека

Коэффициент проницаемости области Ω_0 принимался равным $k_0 = 1$, коэффициенты проницаемости легких принимались равными

$k_1 = k_2 = 4.2$, что соответствует состоянию вдоха. На рис. 7 представлены линии уровня потенциал для плоских сечений $z = 0$ и $y = 0$.

Таким образом, представленные в работе алгоритмы могут эффективно применяться для задач численного анализа полей постоянных токов в трехмерных кусочно-однородных областях со сложной геометрией.

Литература

1. *Бурсиан В. Р.* Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке. — 2-е, испр. и доп. изд.— Л.: Недра, 1972.— 368 с.
2. *Дмитриев В. И., Захаров Е. В.* Метод расчета поля постоянного тока в неоднородных проводящих средах // *Вычислительные методы и программирование.* — 1973.— № 20.— С. 175–186.
3. *Тозони О. В., Маергойз И. Д.* Расчет трехмерных электромагнитных полей. — Киев: Техника, 1974.— 352 pp.
4. *MacLeod R. S., Brooks D. H.* Recent progress in inverse problems in electrocardiology // *IEEE Eng. in Med. Bio. Mag.*— 1998.— Vol. 17, no. 1.— Pp. 73–83.
5. *Ефимов И. Р., Сембелашвили А. Т., Никольский В. Н.* Прогресс в изучении механизмов электрической стимуляции сердца // *Вестник аритмологии.*— 2002.—№ 26.
6. Electrical impedance tomography / G. J. Saulnier, R. S. Blue, J. C. Newell et al. // *IEEE Signal Processing Magazine.*— 2001.— Vol. 18, no. 6.— Pp. 31–43.
7. *Дмитриев В. И., Захаров Е. В.* О численном решении некоторых интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода // *Вычислительные методы и программирование.*— 1968.— № 10.
8. *Смагин С.* Численное решение интегрального уравнения 1-го рода со слабой особенностью для плотности потенциала простого слоя // *ЖВМ и МФ.*— 1988.— Т. 28, № 11.— С. 1663–1673.
9. *Смагин С.* Численное решение интегрального уравнения 1-го рода со слабой особенностью на замкнутой поверхности // *Доклады АН СССР.*— 1988.— Т. 303, № 5.— С. 1048–1051.
10. *Гольник Э. Р., Вдовиченко А. А., Успехов А. А.* Построение и применение препроцессора генерации, управления качеством и оптимизации сеток триангуляции контактных систем // *Информационные технологии.*— 2004.— № 4.— С. 2–10.
11. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов: Пер. с англ.— М.: Мир, 1987.
12. *Dunavant D. A.* High degree efficient symmetrical gaussian rules for the triangle // *Int. J. Num. Meth. Eng.*— 1985.— Vol. 21.— Pp. 1129–1148.