

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ МОРСКИХ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКИХ ЗОНДИРОВАНИЙ ЛОКАЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫХ СЛОИСТЫХ СРЕД*

Под морским магнитотеллурическим зондированием (МТЗ) понимают изучение естественного электромагнитного поля Земли в районе морского дна. Присутствие локальных неоднородностей в кристаллическом фундаменте вызывают аномалии этого поля, которые могут быть использованы при поиске и разведке полезных ископаемых. Для анализа принципиальных возможностей применения метода МТЗ в морской электроразведке достаточно считать, что неоднородность представляет собой осесимметричное тело, ограниченное поверхностью вращения, ось симметрии перпендикулярна границе раздела «морская вода — донные отложения», а вмещающая среда состоит из двух проводящих полупространств, разделенных плоскостью $z = 0$. Структура всей среды обладает осевой симметрией, что позволяет уменьшить размерность исследуемых краевых задач для уравнений Максвелла и перейти к эквивалентным интегральным уравнениям по области сечения тела вращения или одномерным интегральным уравнениям по контуру сечения. Пусть в трехмерном пространстве R^3 , заполненного средой с проводимостью $\sigma(z)$:

$$\sigma(z) = \begin{cases} \sigma_1, & z < 0 \\ \sigma_2, & z > 0 \end{cases} \quad (1)$$

расположена область V с границей S и проводимостью σ_3 , которая является телом, ограниченным поверхностью вращения. Ось симметрии совпадает с осью oz (см. рис.1). Магнитная проницаемость считается постоянной и равной μ_0 во всем пространстве. В этой среде возбуждается монохроматическое электромагнитное поле

$$\{E^o = (E_x^o, 0, 0), H^o = (0, H_y^o, 0)\}$$

(зависимость от времени $e^{-i\omega t}$), источники которого расположены в магнитосфере Земли. Это электромагнитное поле считается низкочастотным и имеющим достаточно большую интенсивность, представляющим собой плоскую электромагнитную волну, нормально падающую на границу раздела (плоскость $z = 0$). Данная модель первичного электромагнитного поля традиционна для методов МТЗ [1].

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 07-05-00523

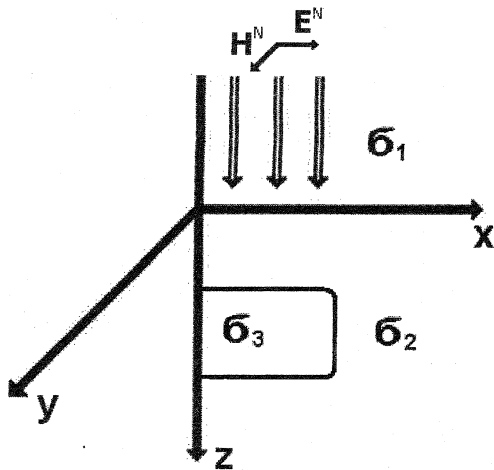


Рис. 1

Полное электромагнитное поле $\{E, H\}$, $E(M) = E^N(M) + E^A(M)$, $H(M) = H^N(M) + H^A(M)$, где $\{E^N, H^N\}$ - электромагнитное поле в среде при отсутствии области $V(\sigma_3 = \sigma_2)$, а $\{E^A, H^A\}$ - аномальное электромагнитное поле, создаваемое областью V . Внутри тела вращения полное поле является аномальным. Полное электромагнитное поле $\{E, H\}$ удовлетворяет векторным уравнениям Максвелла:

$$\begin{aligned} \text{rot}H &= \sigma(M)E; \quad \text{rot}E = i\omega\mu_0 H; \\ \sigma(M) &= \begin{cases} \sigma(z), & M \notin V, \\ \sigma_3, & M \in V. \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

На границе раздела двух полупространств $z = 0$ непрерывны компоненты полного поля (E_x, E_y, H_x, H_y) . На поверхности S непрерывны касательные к ней компоненты векторов полного поля $(E_\varphi, E_r, H_\varphi, H_r)$. На бесконечности $M \rightarrow \infty$ выполнены условия убывания $\lim_{M \rightarrow \infty} E = 0, \lim_{M \rightarrow \infty} H = 0$. Источник возбуждения - плоская линейно-поляризованная электромагнитная волна.

Наряду с декартовой системой координат (z, x, y) , введем цилиндрическую систему координат (z, ρ, φ) , связанную с телом вращения V , и ортогональную нормированную криволинейную систему (ν, τ, φ) , связанную с поверхностью тела S , образованную контуром

вращения Γ (здесь ν – единичная нормаль, а τ – единичная касательная на контуре Γ).

Для удобства в дальнейшем проведем переход к значениям для пространственных переменных $(z, \rho) \rightarrow \omega \sqrt{\mu_0} \cdot (z, \rho)$ и для амплитуд векторов поля $E \rightarrow \frac{1}{\omega} E$, $H \rightarrow \frac{\sqrt{\mu_0}}{\omega} \cdot H$. В этом случае уравнения Максвелла имеют вид: $\text{rot} H = \sigma(M)E$; $\text{rot} E = iH$.

Поле падающей плоской линейно-поляризованной электромагнитной волны, распространяющееся в среде $\sigma = \sigma(z)$ в отсутствии тела вращения при нормальном падении на границу раздела $z = 0$, в системе (z, ρ, φ) имеет вид:

$$\begin{aligned} E^N &= (0, E_\rho^N, E_\varphi^N); \quad H^N = (0, H_\rho^N, H_\varphi^N) \\ E_\rho^N &= E_0(z) \cdot \cos \varphi; \quad E_\varphi^N = -E_0(z) \cdot \sin \varphi \\ H_\rho^N &= -iH_0(z) \cdot \sin \varphi; \quad H_\varphi^N = i \cdot H_0(z) \cdot \cos \varphi \\ \sin \varphi &= \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}); \quad \cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}). \\ E_0(z) &= \begin{cases} A \cdot e^{-\sigma_1 z} + B \cdot e^{+\sigma_1 z}, & z < 0 \\ e^{-\sigma_2 z}, & z > 0 \end{cases} \\ H_0(z) &= \begin{cases} A\sigma_1 \cdot e^{-\sigma_1 z} - B\sigma_1 \cdot e^{+\sigma_1 z}, & z < 0 \\ \sigma_2 e^{-\sigma_2 z}, & z > 0 \end{cases} \\ A &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\sigma_1}; \quad B = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_1}. \end{aligned}$$

Таким образом, нормальное поле плоской волны вне тела вращения V представлено гармониками Фурье по координате вращения φ

$$E_n^N = E_n^N \cdot e^{in\varphi} + E_n^N \cdot e^{-in\varphi}, \quad H_n^N = H_n^N \cdot e^{in\varphi} + H_n^N \cdot e^{-in\varphi}, \quad n = \pm 1:$$

$$\begin{aligned} E_{\pm 1}^N &= \left(0, \mp \frac{i}{2} \cdot E(z), \frac{1}{2} \cdot E(z) \right), \\ H_{\pm 1}^N &= \left(0, \mp \frac{1}{2} \cdot H(z), \frac{i}{2} \cdot H(z) \right). \end{aligned} \tag{3}$$

Построим интегральные представления по поверхности S для аномального поля внутри и снаружи тела V . Применим лемму Лоренца для пары электромагнитных полей: поля $\{E_1, H_1\}$ сторонних источников с

объемной плотностью j_1 и поля $\{E_2, H_2\}$ с плотностью сторонних источников j_2 :

$$\oint_S \{E_1 \times H_2 - E_2 \times H_1\} ds = \int_V \{(j_1, E_2) - (j_2, E_1)\} dv.$$

Выберем в качестве первого поля $\{E_1, H_1\}$ аномальное поле ($j_1 = 0$) внутри тела V . В качестве второго поля $\{E_2, H_2\}$ выберем поле электрического диполя, расположенного в произвольной точке $M_0 \in V$ и направленного вдоль произвольного единичного вектора $\eta = (\eta_z, \eta_\rho, \eta_\varphi)$: $j^e = \eta \cdot \delta(M_0, M)$, $\delta(M_0, M)$ – дельта-функция. Поле электрического диполя удовлетворяет векторным уравнениям Максвелла: $rot H = \sigma(M)E + j^e$; $rot E = iH$. В результате получим представление для электрической компоненты вектора аномального поля E на направление η через значения касательных компонент аномального поля на поверхности S , а ядра в этих представлениях будут выражаться через касательные компоненты поля диполя $j^e = \eta \cdot \delta(M_0, M)$ на поверхности S . Введем вектор-столбец $\bar{F}(M) = (E_\varphi, E_\tau, H_\varphi, H_\tau)^T$ касательных компонент аномального поля на поверхности S и вектор-строку $\bar{Q}_\eta^{(e)}(M_0, M) = (H_{\eta\tau}^{(e)}, -H_{\eta\varphi}^{(e)}, E_{\eta\tau}^{(e)}, -E_{\eta\varphi}^{(e)})$ значений соответствующих касательных компонент поля диполя. Для электрической компоненты аномального поля получим интегральное представление:

$$E_\eta(M_0) = \oint_S \bar{Q}_\eta^{(e)}(M_0, M) \cdot \bar{F}(M) ds$$

Пользуясь двойственностью электромагнитных полей в уравнениях Максвелла ($E \rightarrow -H, H \rightarrow E, i\sigma \leftrightarrow 1$) можно построить аналогичное представление для магнитной компоненты аномального поля и поля точечного магнитного диполя:

$$H_\eta(M_0) = \oint_S \bar{Q}_\eta^{(m)}(M_0, M) \cdot \bar{F}(M) ds,$$

где $\bar{Q}_\eta^{(m)}(M_0, M) = (H_{\eta\tau}^{(m)}, -H_{\eta\varphi}^{(m)}, E_{\eta\tau}^{(m)}, -E_{\eta\varphi}^{(m)})$ состоит из соответствующих компонент поля точечного магнитного источника $j^m = \eta \cdot \delta(M_0, M)$, $rot H = \sigma(M)E$; $rot E = iH - j^m$.

Если применить полученные представления для электромагнитных компонент аномального поля по координате вращения φ и по некоторому направлению η в точке M_0 на полуплоскости сечения тела вращения ($|z| < \infty, \rho \geq 0, \varphi = const$) и объединить в вектор-столбец $\bar{F}(M_0) = (E_{\varphi 0}, E_{\tau 0}, H_{\varphi 0}, H_{\tau 0})^T$ значения компонент поля при $\eta = \{\varphi_0, \tau_0\}$, то получим матричную форму интегральных представлений:

$$\bar{F}(M_0) = \oint_S \hat{Q}(M_0, M) \cdot \bar{F}(M) ds, \quad (4)$$

где матрица \hat{Q} состоит из векторов-строк $\bar{Q}_\varphi^{(e)}, \bar{Q}_\tau^{(e)}, \bar{Q}_\varphi^{(m)}, \bar{Q}_\tau^{(m)}$. Матрицу \hat{Q} также можно представить в блочном виде

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} \hat{H}^{(e)} & \hat{E}^{(e)} \\ \hat{H}^{(m)} & \hat{E}^{(m)} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где в блоках стоят матрицы тензорного типа

$$\hat{U}^p = \begin{pmatrix} U_{\varphi_0\varphi}^{(p)} - U_{\varphi_0\tau}^{(p)} \\ U_{\tau_0\varphi}^{(p)} - U_{\tau_0\tau}^{(p)} \end{pmatrix}, U = (E, H), p = (e, m) \quad (6)$$

составленные из значений магнитных и электрических касательных компонент соответствующих полей точечных электрических и магнитных источников внутри тела вращения для среды с проводимостью $\sigma = \sigma_3$. Заметим, что аналогичные представления можно построить и в точке вне тела вращения $M_0 \notin V$, при этом матрица \hat{Q} для ядер интегральных представлений будет составлена из значений компонент полей точечных источников во внешней неоднородной кусочно-постоянной среде с проводимостью $\sigma(z)$.

Все компоненты электромагнитных точечных источников в матрице \hat{Q} для среды с кусочно-постоянной проводимостью σ определяются с помощью фундаментальных решений $G(M_0, M)$ векторного уравнения Гельмгольца $(\Delta + i\sigma) \cdot G(M_0, M) = -\eta \cdot \delta(M_0, M)$ по векторным формулам:

$$E_{nz}^e = \frac{1}{\sigma} G_{nz}^{(2)} + G_{nz}^{(0)}, \quad H_{nz}^e = \frac{1}{\mu_0} G_{nz}^{(1)};$$

$$H_{nz}^m = \frac{i}{\mu_0} \cdot G_{nz}^{(2)} + G_{nz}^{(0)}, \quad E_{nz}^e = -\frac{i}{\sigma} G_{nz}^{(1)};$$

$$\mu_0 \equiv 1,$$

$$G_{nz}^{(1)} = \nabla_\chi \times G\eta, \quad G_{nz}^{(2)} = -\nabla_\chi (\nabla_\eta, G),$$

$$G_{nz}^{(0)} = (\chi, G\eta)$$

Здесь $\eta = (\varphi_0, \tau_0)$ - единичный вектор в точке M_0 , $\chi = (\varphi, \tau)$ - единичный вектор в точке M , ∇ - градиент. В однородной среде фундаментальное решение является скалярной функцией Грина:

$$G(M_0, M) = \frac{1}{\Omega} \frac{e^{ikR}}{R}, \quad R = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0)},$$

где $k^2 = i\sigma$, $M(z, \rho, \varphi)$, $M_0(z_0, \rho_0, \varphi_0)$, $\Omega = 4\pi$ величина телесного угла для точки M_0 . В случае неоднородной (кусочно-постоянной) среды фундаментальное решение представляет собой тензор Грина [2]. Отметим также, что формально полученные интегральные представления (4) можно рассматривать и для точек на поверхности S , совершая предельный переход $M_0 \rightarrow S$ по нормали к поверхности, при этом $\Omega = 2\pi$, а ядра представлений, содержащие производные функции Грина $G_{nz}^{(1)}$, $G_{nz}^{(2)}$, будут иметь сингулярные и гиперсингулярные особенности. Поэтому для представлений в точках на поверхности S следует использовать интегро-дифференциальную форму записи представлений (например, вынося производные по точке M_0 за знак интеграла) и понимать значения соответствующих выражений в предельном смысле, допускающем существование интегралов [4].

Воспользуемся симметрией вращения задачи и представим компоненты векторов электромагнитных полей в виде рядов Фурье по координате φ . Представим введенные нами в интегральных представлениях векторы и матрицы в виде:

$$\begin{aligned} \bar{F}(M) &= \bar{F}(z, \rho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{F}_n(z, \rho) \cdot e^{in\varphi}, \\ \hat{Q}(M_0, M) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{Q}_n(P_0, P) \cdot e^{in\psi}, \\ P(z, \rho), P_0(z_0, \rho_0), \psi &= \varphi_0 - \varphi. \end{aligned} \quad (7)$$

Из полученных выше интегральных представлений по поверхности S для введенных здесь гармоник Фурье получим одномерные интегральные представления по контуру вращения Γ в полуплоскости ($|z| \leq \infty, \rho \geq 0$):

$$\Omega \cdot \bar{F}_n(P_0) = \int_{\Gamma} \hat{Q}_n(P_0, P) \bar{F}_n(P) \rho d\tau. \quad (8)$$

Запишем данные представления для аномального поля внутри сечения тела вращения в среде с проводимостью $\sigma = \sigma_3$ и для нормального поля плоской волны внутри контура Γ в среде $\sigma(z) = \sigma_2$, а затем для аномального поля вне сечения тела вращения в неоднородной среде $\sigma = \sigma(z)$, при этом используем условия непрерывности для всех касательных компонент полного поля на поверхности S , представленных вектором $\bar{F}(P)$ и его гармониками $\bar{F}_n(P)$ на контуре Γ , а также учтем направление внешней нормали и направление обхода при интегрировании областей вне и внутри контура Γ . Объединяя данные представления и совершая предельный переход точки наблюдения на контур по нормали $P_0 \rightarrow \Gamma$, в результате получим систему одномерных интегральных

уравнений относительно гармоник Фурье касательных компонент аномального поля $\bar{F}_n(P)$ на контуре Γ в матричном виде:

$$\bar{F}_n(P_0) - \int_{\Gamma} \hat{K}_n(P_0, P) \bar{F}_n(P) d\tau = \bar{W}_n(P_0). \quad (9)$$

Ядра уравнений имеют вид:

$$\hat{K}_n(P_0, P) = \frac{1}{4\pi} \rho \cdot \left\{ \hat{Q}_n^{(\sigma_3)}(P_0, P) - \hat{Q}_n^{(\sigma(z))}(P_0, P) \right\} \quad (10)$$

и выражаются через значения полей точечных источников внутри тела вращения в среде $\sigma = \sigma_3$, представленных в матрице $\hat{Q}_n^{(\sigma_3)}(P_0, P)$, и вне тела вращения в среде $\sigma = \sigma(z)$, представленных в матрице $\hat{Q}_n^{(\sigma(z))}(P_0, P)$.

Для определения элементов матриц $\hat{Q}_n^{(\sigma)}(P_0, P)$ необходимо использовать гармоники разложения в ряд Фурье фундаментального решения $G(M_0, M)$: $G(M_0, M) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n(P_0, P) \cdot e^{in\psi}$. Правая часть уравнения

$\bar{W}_n(P_0) = (E_{\varphi_0}^N, E_{\tau_0}^N, H_{\varphi_0}^N, H_{\tau_0}^N)^T$ определяется через гармоники касательных компонент нормального поля падающей плоской волны в среде $\sigma = \sigma(z)$ на контуре Γ . В силу того, что нормальное поле плоской волны возбуждает только две гармоники $n = \pm 1$, то аномальное поле также будет представлено только двумя данными гармониками $\bar{F}_{\pm 1}$.

Приведем выражения для вычисления матриц ядер интегральных уравнений по контуру Γ для случая однородной среды $\sigma(z) = const$, ($\sigma_1 = \sigma_2$). Гармоники фундаментального решения $G_n(P_0, P)$ в этом случае являются скалярными функциями [3]:

$$G_n(P, P_0) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \cdot e^{in\phi} d\phi,$$

$$R = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos\phi}, \quad \phi = \varphi - \varphi_0, \quad k^2 = i\sigma.$$

Рассмотрим две системы координат на полуплоскости $\varphi = const$: координаты (z, ρ) и криволинейные координаты единичных нормали и касательной (ν, τ) на контуре вращения Γ . Введем следующие обозначения: в точке $P(z, \rho)$ определим $c = c(\tau)$, $c = \cos(\tau, \rho) = \cos(\nu, z)$ и $s = s(\tau)$, $s = \sin(\tau, \rho) = -\sin(\nu, \rho)$ или $c = \rho'_{\tau}$, $s = z'_{\tau}$ при параметрическом задании контура $\Gamma \{z = z(\tau), \rho = \rho(\tau)\}$; аналогично в точке $P_0(z_0, \rho_0)$ определим $c_0 = \cos(\tau_0, \rho_0) = \cos(\nu_0, z_0)$, $s_0 = \sin(\tau_0, \rho_0) = -\sin(\nu_0, \rho_0)$. Используем разложение единичных векторов \bar{n}_{φ} , \bar{n}_{τ} в пространстве R^3 в

точке $M_0(z_0, \rho_0, \varphi_0)$ по координатным векторам криволинейной системы (ν, τ, φ) в точке $M(z, \rho, \varphi)$:

$$\begin{aligned}\vec{n}_{\varphi_0} &= (-s \sin \phi, c \sin \phi, \cos \phi), \\ \vec{n}_{\tau_0} &= (s_0 c - c_0 s \cos \phi, s_0 s + c_0 c \cos \phi, -c_0 \sin \phi), \\ \phi &= \varphi - \varphi_0.\end{aligned}$$

Для определения гармоник полей точечных источников в разных средах с заданной проводимостью σ , входящих в выражения для ядер уравнений, применим общие формулы:

$$\begin{aligned}E_{nz}^{(e)} &= \frac{1}{\sigma} G_{nz}^{(2)} + G_{nz}^{(0)}, \quad H_{nz}^{(e)} = G_{nz}^{(1)}; \\ H_{nz}^{(m)} &= i \cdot G_{nz}^{(2)} + G_{nz}^{(0)}, \quad E_{nz}^{(m)} = -\frac{i}{\sigma} G_{nz}^{(1)}; \\ \eta &= (\varphi_0, \tau_0), \quad \chi = (\varphi, \tau)\end{aligned} \quad (11)$$

Из приведенных выше общих определений получим конкретные выражения. Для этого воспользуемся гармониками функции Грина [3] $G_n, G_n^\pm = (G_{n+1} \pm G_{n-1})/2$, а также их производными по координатам на контуре $\Gamma(z, \rho)$ или (ν, τ) : $\frac{\partial}{\partial \nu} = c \frac{\partial}{\partial z} - s \frac{\partial}{\partial \rho}$, $\frac{\partial}{\partial \tau} = s \frac{\partial}{\partial z} + c \frac{\partial}{\partial \rho}$ в точках $P, P_0 \in \Gamma$. В результате получим выражения:

$$\begin{aligned}G_{\varphi_0\varphi}^{(1)} &= \frac{\partial G_n^-}{\partial z} = \frac{in}{\rho \rho_0} \cdot (z - z_0) \cdot G_n, \quad G_{\varphi_0\varphi}^{(2)} = -\frac{(in)^2}{\rho \rho_0} G_n, \quad G_{\varphi_0\varphi}^{(0)} = G_n^+; \\ G_{\varphi_0\tau}^{(1)} &= s \cdot \frac{n}{\rho} \cdot G_n^- - \frac{\partial G_n^+}{\partial \nu}, \quad G_{\varphi_0\tau}^{(2)} = -\frac{in}{\rho_0} \cdot \frac{\partial G_n}{\partial \tau}, \quad G_{\varphi_0\tau}^{(0)} = ic \cdot G_n^-; \\ G_{\tau_0\varphi}^{(1)} &= s_0 \cdot \frac{\partial G_n^-}{\partial \rho_0} - c_0 \cdot \frac{\partial G_n^+}{\partial z_0}, \quad G_{\tau_0\varphi}^{(2)} = -\frac{in}{\rho} \cdot \frac{\partial G_n}{\partial \tau_0}, \quad G_{\tau_0\varphi}^{(0)} = -ic_0 \cdot G_n^-; \\ G_{\tau_0\tau}^{(1)} &= ic_0 \frac{\partial G_n^-}{\partial \nu} + \frac{in}{\rho} \cdot (s_0 c \cdot G_n - c_0 s \cdot G_n^+), \\ G_{\tau_0\tau}^{(2)} &= -\frac{\partial^2 G_n}{\partial \tau_0 \partial \tau}, \quad G_{\tau_0\tau}^{(0)} = c_0 c \cdot G_n^+ + s_0 s \cdot G_n.\end{aligned}$$

Функции $G_n(P_0, P)$ имеют интегрируемую особенность [3] $\pi \cdot (\rho \rho_0)^{-1} \cdot \ln(\sqrt{(z - z_0)^2 + (\rho - \rho_0)^2})$ при совпадении аргументов $P_0 \rightarrow P$ на полуплоскости. При вычислении ядер уравнений (9) используются выражения, содержащие гармоники функций Грина $G_n(P_0, P)$ в различных средах $\sigma_3 \neq \sigma(z)$ и с различными коэффициентами. Поэтому ядра уравнений при совпадении аргументов могут иметь интегрируемые

особенности, если содержат функции G_n и их нормальные производные, и сингулярные или гиперсингулярные особенности, если содержат производные функций G_n первого и или второго порядка по направлению касательной на контуре интегрирования. Например, элементы $\hat{K}_n(P_0, P)$, которые содержат разностные выражения $\frac{1}{\sigma_3} G_{nz}^{(2)} - \frac{1}{\sigma_2} G_{nz}^{(2)}$, будут иметь сингулярную особенность для $(\eta, \chi) = \{(\varphi_0, \tau), (\tau_0, \varphi)\}$ и будут иметь гиперсингулярную особенность для $(\eta, \chi) = (\tau_0, \tau)$, а соответствующие интегродифференциальные выражения рассматриваются в предельном смысле при стремлении точки $P_0 \rightarrow \Gamma$ по направлению нормали к контуру.

В случае падения плоской волны (3) электромагнитное поле представлено двумя гармониками $n = \pm 1$. Правая часть уравнений (9) имеет вид $\bar{W}_{\pm 1}(P_0) = \left(\mp \frac{i}{2} E(z), \frac{c_0}{2} E(z), \frac{i}{2} H(z), \mp \frac{c_0}{2} H(z) \right)^T$, а элементы матрицы для ядер уравнений (10) определяются по формулам (11) через функции $G_1, G_1^\pm = (G_2 \pm G_0)/2$:

$$\begin{aligned} G_{\varphi_0\varphi}^{(1)} &= \pm \frac{\partial G_1^-}{\partial z} = \pm \frac{i}{\rho\rho_0} \cdot (z - z_0) \cdot G_1, \quad G_{\varphi_0\varphi}^{(2)} = \frac{1}{\rho\rho_0} G_1, \quad G_{\varphi_0\varphi}^{(0)} = G_1^+; \\ G_{\varphi_0\tau}^{(1)} &= s \cdot \frac{1}{\rho} \cdot G_1^- - \frac{\partial G_1^+}{\partial \nu}, \quad G_{\varphi_0\tau}^{(2)} = \mp \frac{i}{\rho_0} \cdot \frac{\partial G_1}{\partial \tau}, \quad G_{\varphi_0\tau}^{(0)} = \pm ic \cdot G_1^-; \\ G_{\tau_0\varphi}^{(1)} &= s_0 \cdot \frac{\partial G_1}{\partial \rho_0} - c_0 \cdot \frac{\partial G_1^+}{\partial z_0}, \quad G_{\tau_0\varphi}^{(2)} = \pm \frac{i}{\rho} \cdot \frac{\partial G_1}{\partial \tau_0}, \quad G_{\tau_0\varphi}^{(0)} = \mp ic_0 \cdot G_1^-; \\ G_{\tau_0\tau}^{(1)} &= \pm ic_0 \frac{\partial G_1^-}{\partial \nu} \pm \frac{i}{\rho} \cdot (s_0 c \cdot G_1 - c_0 s \cdot G_1^+), \\ G_{\tau_0\tau}^{(2)} &= -\frac{\partial^2 G_1}{\partial \tau_0 \partial \tau}, \quad G_{\tau_0\tau}^{(0)} = c_0 c \cdot G_1^+ + s_0 s \cdot G_1. \end{aligned}$$

Структура матриц $\hat{K}_{\pm 1}(P_0, P)$ повторяет структуры (5,6), что позволяет при заданном выражении правой части $\bar{W}_{\pm 1}(P_0)$ искать решение уравнений (9) для двух гармоник $n = \pm 1$ в общем виде $\bar{F}_{\pm 1} = \left(\mp iE_\varphi, E_\tau, iH_\varphi, \mp H_\tau \right)^T$ и определить результирующий вектор решений \bar{F} для касательных компонент полного поля на поверхности тела вращения S в виде

$$\bar{F} = \left(-E_\varphi \cdot \sin \varphi, E_\tau \cdot \cos \varphi, iH_\varphi \cdot \cos \varphi, -iH_\tau \cdot \sin \varphi \right)^T \quad (12)$$

Вектор решений \bar{F}_1 для гармоник полного поля на контуре вращения Γ позволяет вычислить по формулам (7,8) компоненты полного электромагнитного поля вне тела вращения.

Таким образом, поставленная задача сведена к решению системы одномерных интегродифференциальных уравнений II рода (9) для $n=1$. Численное решение уравнений данного типа основано на аналитическом выделении сильных особенностей на этапе аппроксимации искомых функций и интегральных операторов [4].

Нормальное поле плоской волны линейно поляризовано в плоскости (x, y) и компоненты полного поля E_z и H_z будут присутствовать только в аномальном поле, что позволяет использовать их значения для анализа в МТЗ. В частности, приведем выражение для вычисления компоненты $H_z^A(z_0, \rho_0, \varphi_0)$ в плоскости $z_0=0$ для однородной среды $\sigma(z)=\sigma_1$ ($\sigma_2=\sigma_1$):

$$H_z^A = -H(\rho_0) \cdot \sin \varphi_0$$

$$H(\rho_0) = \int_{\Gamma} \bar{Q}_z^{(m)}(P_0, P) \bar{F}_1(P) \rho d\tau,$$

$$\bar{Q}_z^{(m)}(M_0, M) = (H_{z_0\tau}^{(m)}, -H_{z_0\varphi}^{(m)}, E_{z_0\tau}^{(m)}, -E_{z_0\varphi}^{(m)})$$

$$H_{z_0\chi}^{(m)} = i \cdot G_{z_0\chi}^{(2)}, \quad E_{z_0\chi}^{(m)} = -\frac{i}{\sigma} G_{z_0\chi}^{(1)}, \quad \chi = (\tau, \varphi)$$

$$G_{z_0\varphi}^{(1)} = \frac{\partial G_1}{\partial \rho_0}, \quad G_{z_0\varphi}^{(2)} = \frac{i}{\rho} \cdot \frac{\partial G_1}{\partial z_0};$$

$$G_{z_0\tau}^{(1)} = \frac{i}{\rho} \cdot c \cdot G_1, \quad G_{z_0\tau}^{(2)} = -\frac{\partial^2 G_1}{\partial z_0 \partial \tau}, \quad G_{z_0\tau}^{(0)} = s \cdot G_1,$$

$$G_1 = G_1(P_0, P), \quad P_0(0, \rho_0), \quad P(z, \rho) \in \Gamma$$

В заключение заметим, что в случае однородной среды для фундаментального решения можно также использовать интегральное представление Зоммерфельда:

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \cdot \frac{\lambda}{\gamma} \cdot e^{-\gamma|z-z_0|} d\lambda,$$

$$R = \sqrt{r^2 + (z-z_0)^2}, \quad \gamma^2 = \lambda^2 - i\sigma$$

и далее, применяя теорему сложения Графа для цилиндрических функций

Бесселя $J_n(x)$: $J_0(\lambda r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\lambda \rho) \cdot J_n(\lambda \rho_0) \cdot e^{in\phi}$, $r = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos\phi}$,

для гармоник Фурье фундаментального решения получить интегральные выражения:

$$G_n(P_0, P) = \int_0^{\infty} J_n(\lambda \rho) \cdot J_n(\lambda \rho_0) \cdot \frac{\lambda}{\gamma} \cdot e^{-\gamma|z-z_0|} d\gamma, \quad -\infty < n < \infty.$$

В среде со слоистой неоднородностью $\sigma = \sigma(z)$ для фундаментальных решений $G(P_0, P)$ необходимо определять тензор Грина и его Фурье-гармоники $G_n(P_0, P)$. Элементы такого тензора $G_n(P_0, P)$ также можно

представить в виде интегралов $\int_0^{\infty} J_n(\lambda \rho) \cdot J_n(\lambda \rho_0) \cdot g^{(n)}(\lambda z) \cdot \frac{\lambda}{\gamma} \cdot e^{-\gamma|z-z_0|} d\gamma$,

где весовые функции $g^{(n)}(z)$ следует находить из условий непрерывности касательных компонент тензора на границе двух сред $z = 0$ [2].

Литература

1. Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И. Магнитотеллурическое зондирование горизонтально однородных сред. «Недра», М. 1991, 250 с.
2. Дмитриев В.И., Силкин А.Н., Фарзан Р. Тензорная функция Грина для системы уравнений Максвелла в слоистой среде. «Прикладная математика и информатика», № 7, М. Изд-во фак-та ВМК МГУ, 2007.
3. Васильев Е.Н. Об одной функции, встречающейся в теории дифракции. ЖВМ и МФ, 1965, т. 5, № 5, с. 841-851.
4. Захаров Е.В., Давыдов А.Г., Халева И.В. Интегральные уравнения с ядрами типа Адамара в задачах дифракции. «Актуальные вопросы прикладной математики» Сб. трудов фак-та ВМК МГУ, Изд-во МГУ, 1989, с. 118-12