Е.В. Захаров, И.В. Дмитриева, М.А. Шарипов

МЕТОД КОНГРУЭНТНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ В ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ВРАЩЕНИЯ

Введение

Как известно задачи дифракции волн (акустических или электромагнитных) формулируются как внешние краевые задачи для уравнения Гельмгольца или уравнений Максвелла. Решение этих задач обычно проводится методом граничных уравнений, который состоит в редукции краевой задачи к интегральному уравнению по поверхности [1, 2]. Поэтому всё сводится к созданию эффективных методов численного решения поверхностных интегральных уравнений.

Дискретизация интегрального уравнения позволяет его решение свести к решению системы линейных алгебраических уравнений. При этом система может быть очень высокого порядка, что приводит к необходимости достаточно больших затрат времени ЭВМ. Принципиально это при решении обратных задач, например, при определении формы тела по диаграмме рассеяния. В этом случае приходится многократно решать прямую задачу. Поэтому быстродействие при решении интегральных уравнений во многом определяет эффективность решения обратной задачи. Особенно, если необходимо решать её в реальных масштабах времени, например, при медицинской акустической томографии.

Если дифракция волн происходит на поверхности вращения (замкнутой или незамкнутой), то интегральное уравнение определено на поверхности вращения. Естественно, возникает вопрос: как использовать симметрию поверхности, чтобы получить более эффективный метод решения интегрального уравнения. В основном с этой целью используются три метода: – метод разложения решения по круговым гармоникам; – метод клеточно-циркулянтной матрицы алгебраической системы, к которой сводится интегральное уравнение; – метод конгруэнтных составляющих, в котором решение интегрального уравнения по всей поверхности сводится к решению нескольких независимых интегральных уравнений только по части поверхности.

Рассмотрим и сравним эти методы, на примере задачи дифракции акустических волн на абсолютно мягкой поверхности вращения (задача Дирихле в пространстве).

п.1. Постановка задачи и редукция к интегральному уравнению

Пусть поверхность вращения S находится в однородной изотропной среде, в которой акустические волны распространяются со скоростью c. Среда обладает поглощением энергии волн, которое характеризуется коэффициентом поглощения γ. Акустическое поле характеризуется величиной $u(M)$, которая является решением уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u(M)+k^2u(M)=f(M),$$

где $k=\sqrt{\dfrac{\omega(\omega+i\gamma)}{c^2}}$, $\operatorname{Im}k\geq 0$, ω – частота колебания поля, $f(M)$ – определяет плотность первичных источников поля. На поверхности S выполняется граничное условие $u|_S=0$. На бесконечности при $\operatorname{Im}k\neq 0$ выполняется условие $u(M)\approx o\left(1/r\right)$ при $r\to\infty$. Если поверхность вращения незамкнута, то должны быть выполнены условия на ребре.

Представим решение задачи в виде суммы

$$u(M)=u_0(M)+v(M), \tag{1}$$

где $u_0(M)$ – первичное поле системы источников (для одного источника р

$$u_0(M)=e^{ikR_{MM_0}}\Big/R_{MM_0}; \quad R=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}, \tag{2}$$

$M_0=(x_0,y_0,z_0)$– точка расположения источника); Вторичное поле от источников на поверхности $v(M)$, представимо в виде потенциала простого слоя

$$v(M)=\int\limits_S G(M,P)\cdot\psi(P)dS_P \tag{3}$$

Функция $G(M,P)=\dfrac{e^{ikR_{MP}}}{4\pi R_{MP}}$– фундаментальное решение уравнения Гельмгольца (функция точечного источника, расположенного в точке $P\in S$).

Подставив (1) в граничное условие $u|_S=0$, получим интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$\int\limits_S G(M,P)\cdot\psi(P)dS_P=-u_0(M), \quad M\in S. \tag{4}$$

Запишем интегральное уравнение (4) для случая, когда поверхность S является поверхностью вращения вокруг оси OZ (рис.1). Для этого введём систему криволинейных координат вращения $(q,\ \tau,\ \varphi)$, так чтобы поверхность S совпадала с частью координатной поверхности $q = q_0 = const$. При этом связь координат q и τ с цилиндрическими координатами r и z задаётся уравнениями $r = r(q,\tau)$, $z = z(q,\tau)$. Образующая поверхности вращения Γ задаётся уравнениями

$$r = r(q_0,\tau) = \rho(\tau);\ z = z(q_0,\tau) = \xi(\tau),\ \alpha \le \tau \le \beta. \tag{5}$$

Коэффициенты Ламе системы координат $(q,\ \tau,\ \varphi)$ равны:

$$l_q = \sqrt{(r_q')^2 + (z_q')^2};\ l_\tau = \sqrt{(r_\tau')^2 + (z_\tau')^2};\ l_\varphi = r. \tag{6}$$

На поверхности вращения при $q = q_0$ имеем:

$$l_q(q_0,\tau) = h_q(\tau);\ l_\tau(q_0,\tau) = h_\tau(\tau);\ l_\varphi = r(q_0,\tau) = \rho(\tau). \tag{7}$$

В системе координат $(q,\ \tau,\ \varphi)$ интегральное уравнение запишется в виде:

$$\begin{gathered}\int\limits_\alpha^\beta \rho(\tau_P) h_\tau(\tau_P) d\tau_P \int\limits_0^{2\pi} K(\tau_P,\tau_M,\cos(\varphi_P - -\varphi_M))\Psi(\tau_P,\varphi_P)d\varphi_P = \\ = -u_0(\tau_M,\varphi_M)\end{gathered}, \tag{8}$$

где

$$K(\tau_P,\tau_M,\cos(\varphi_P - \varphi_M)) = \frac{e^{ikR_1(\tau_P,\tau_M,\cos(\varphi_P - \varphi_M))}}{4\pi R_1(\tau_P,\tau_M,\cos(\varphi_P - \varphi_M))}, \tag{9}$$

$$R_1 = \sqrt{\rho^2(\tau_M) + \rho^2(\tau_P) - 2\rho(\tau_P)\rho(\tau_M)\cos(\varphi_P - \varphi_M) + (\xi(\tau_P) - \xi(\tau_M))^2},$$

$$u_0(\tau_M,\varphi_M) = \frac{e^{ikR_0(\tau_M,\cos\varphi_m)}}{R_0(\tau_m,\cos\varphi_m)}, \tag{10}$$

$$R_0 = \sqrt{\rho^2(\tau_M) + \rho_0{}^2 - 2\rho(\tau_M)\rho_0\cos\varphi_M + (\xi(\tau_M) - z_0)^2},$$

$(\rho_0, z_0, \varphi_0 = 0)$ – координаты источника поля. Рассмотрим различные методы решения уравнения (8).

п.2. Метод разложения по круговым гармоникам

Разложим плотность потенциала $\Psi(\tau_P,\varphi_P)$ и правую часть $u_0(\tau_M,\varphi_M)$ интегрального уравнения (8) в ряд Фурье по системе функций $e^{in\varphi}$ [3]:

$$\Psi(\tau_P,\varphi_P)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\psi_n(\tau_P)e^{in\varphi_P}\,;\;\; u_0(\tau_M,\varphi_M)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u_0^{(n)}(\tau_M)e^{in\varphi_M}\,. \qquad (11)$$

Подставив разложения (11) в уравнение (8), получим:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\rho(\tau_P)h_\tau(\tau_P)d\tau_P\int_0^{2\pi}K(\tau_P,\tau_M,\cos(\varphi_P-\varphi_M))\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\psi_n(\tau_P)e^{in\varphi_P}d\varphi_P=$$

$$=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}u_0^{(n)}(\tau_M)e^{in\varphi_M}$$

Сделав в интеграле замену переменного $\varphi_P-\varphi_M=\alpha$, получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\varphi_M}\int_{\alpha}^{\beta}\rho(\tau_P)h_\tau(\tau_P)\psi_n(\tau_P)d\tau_P\int_0^{2\pi}K(\tau_P,\tau_M,\cos\alpha)e^{in\alpha}d\alpha=$$

$$=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}u_0^{(n)}(\tau_M)e^{in\varphi_M}.$$

Откуда получаем независимые уравнения для гармоник:

$$\int_{\alpha}^{\beta}K_n(\tau_P,\tau_M)\psi_n(\tau_P)\rho(\tau_P)h_\tau(\tau_P)d\tau_P=-u_0^{(n)}(\tau_M),\quad \tau_M\in[\alpha,\beta], \qquad (12)$$

где

$$K_n(\tau_P,\tau_M)=\int_0^{2\pi}K(\tau_P,\tau_M,\cos\alpha)e^{in\alpha}d\alpha\,. \qquad (13)$$

Данный метод эффективен, если первичный источник поля находится достаточно далеко от тела. В этом случае необходимо определить небольшое число гармоник поля. Если же источник близок к поверхности тела, что обычно бывает при акустической томографии, необходимо проводить вычисления большого числа гармоник поля. Естественно, это существенно снижает эффективность метода.

п.3. Метод клеточно-циркулянтной матрицы

В методе разложения по круговым гармоникам осесимметричность задачи учитывалась непосредственно и двумерное интегральное уравнение сводилось к одномерным для каждой гармоники поля. Можно учитывать осесимметричность задачи по другому. Для этого алгебраизуем двумерное интегральное уравнение (8) и перейдем к алгебраической системе с матрицей особого вида. Из-за осесимметричности задачи матрица будет клеточно-циркулянтного вида, для алгебраических систем с такими матрицами разработаны специальные методы решения. Рассмотрим подробнее такой подход к решению интегрального уравнения (8).

Пусть на поверхности вращения при $q = q_0$ задана сетка по координатам φ_P и τ_P:

$$\varphi^{(n)} = (n-1)\frac{2\pi}{N}; \; n \in [1, N+1]; \; \varphi^{(0)} = \varphi^{(N+1)} - 2\pi; \qquad (14)$$

$$\tau^{(m)} = \alpha + (s-1)\frac{\beta - \alpha}{S}; \; s \in [1, S+1]$$

Искомую функцию $\Psi(\tau_P, \varphi_P)$ приближаем кусочно-постоянной функцией на введенной сетке

$$\Psi(\tau_P, \varphi_P) \cong \sum_{n=1}^{N}\sum_{s=1}^{S} \psi_{ns}\eta_{ns}(\tau_P, \varphi_P), \qquad (15)$$

$$\psi_{nm} = \Psi\left(\tau_P = \alpha + \left(s - \frac{1}{2}\right)\frac{\beta - \alpha}{S}, \; \varphi_P = \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{N}\right),$$

$$\eta_{nm} = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad \varphi_P \in \left[\varphi^{(n)}, \varphi^{(n+1)}\right] \quad \textit{и} \quad \tau_P \in \left[\tau^{(s)}, \tau^{(s+1)}\right], \\ 0, & \textit{если} \quad \varphi_P \notin \left[\varphi^{(n)}, \varphi^{(n+1)}\right] \quad \textit{или} \quad \tau_P \notin \left[\tau^{(sP)}, \tau^{(s+1)}\right] \; . \end{cases} \qquad (16)$$

Подставив (15) в (8), получим:

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{s=1}^{S} A_{ns}(M)\psi_{ns} = -u_0(M), \qquad (17)$$

где

$$A_{ns}(M) = \frac{1}{4\pi}\int_{\tau^{(s)}}^{\tau^{(s+1)}} \rho(\tau_P)h_\tau(\tau_P)d\tau_P \int_{\varphi^{(n)}}^{\varphi^{(n+1)}} K\left(\tau_P, \tau_M, \cos(\varphi_P - \varphi_M)\right)d\varphi_P \, . \qquad (18)$$

Если положить

$$\tau_M^k = \alpha + \left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\beta - \alpha}{S}; \quad k \in [1, \; S]; \quad \varphi_M^l = \left(l - \frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{N}; \quad l \in [1, \; N]$$

и обозначить

$$u_0\left(\tau_M^k, \varphi_M^l\right) = u_0^{lk}, \qquad A_{ns}\left(\tau_M^k, \varphi_M^l\right) = A_{ns}^{lk},$$

то получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{s=1}^{S} A_{ns}^{lk}\psi_{ns} = -u_0^{(lm)}, \quad l \in [1, \; N], \quad k \in [1, \; S] \qquad (19)$$

с клеточно-циркулянтной матрицей

$$A_{ns}^{lk}=\frac{1}{4\pi}\int_{\tau^{(s)}}^{\tau^{(s+1)}}\rho(\tau_P)h_\tau(\tau_P)d\tau_P\int_{-\frac{\pi}{N}}^{\frac{\pi}{N}}K\left(\tau_P,\tau_M^k,\cos\left(\frac{2\pi}{N}(n-l)+\varphi\right)\right)d\varphi, \quad (20)$$

так как

$$A_{ns}^{lk}=A_{n_1s}^{l_1k},\ \text{если}\quad n_1-l_1=n-l+N. \quad (21)$$

Полученная система решается численно специальными алгебраическими методами, ориентированными на клеточную циркулянтность матрицы. При расчетах элементов матрицы A_{ns}^{lk} необходимо учитывать, что при $l=n$ и $k=s$ мы имеем интеграл с особенностью.

п.4. Метод конгруэнтных составляющих

Метод конгруэнтных составляющих использует возможность деления поверхности вращения S на N конгруэнтных частей:

$$\{S_n\},\quad n\in[1,\ N];\ S=\bigcup_{n=1}^{N}S_n;\quad S_n\cap S_m=0\ \text{при}\ n\neq m.$$

При этом

$$P(\tau,\varphi)\in S_n,\ \text{если}\ \ \alpha\le\tau\le\beta;\quad \frac{2\pi(n-1)}{N}<\varphi<\frac{2\pi n}{N}. \quad (22)$$

Применяя теоретико - групповой подход (метод конечных коммутативных групп) и используя инвариантность оператора Лапласа относительно циклической группы порядка N [4], [5], можно с интегральной поверхности S перейти на конгруэнтную составляющую S_n. В этом случае двумерное интегральное уравнение (8) имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{N}\int_\alpha^\beta\rho(\tau_P)h_\tau(\tau_P)d\tau_P\int_{\frac{2\pi(n-1)}{N}}^{\frac{2\pi n}{N}}K(\tau_P,\tau_M,\cos(\varphi_P-\varphi_M))\Psi(\tau_P,\varphi_P)d\varphi_P=$$
$$=-u_0(\tau_M,\varphi_M).$$

Введем замены переменных $\varphi_P=\frac{2\pi(n-1)}{N}+\varphi$; $\varphi_M=\frac{2\pi(m-1)}{N}+\xi$.

Тогда получим N уравнений:

$$\sum_{n=1}^{N}\int_{\alpha}^{\beta}\rho(\tau_P)h_\tau(\tau_P)d\tau_P\int_{0}^{\frac{2\pi}{N}}K\left(\tau_P,\tau_M,\cos\left(\varphi-\xi+\frac{2\pi(n-m)}{N}\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\Psi\left(\tau_P,\varphi+\frac{2\pi(n-1)}{N}\right)d\varphi=$$

$$=-u_0\left(\tau_M,\xi+\frac{2\pi(m-1)}{N}\right);\ \alpha<\tau_M<\beta;\ 0<\xi<\frac{2\pi}{N};\ m\in[1,\ N]. \tag{23}$$

Если обозначить

$$\Psi\left(\tau_P,\varphi+\frac{2\pi(n-1)}{N}\right)=\psi_n(\tau_P,\varphi);\ -u_0\left(\tau_M,\xi+\frac{2\pi(m-1)}{N}\right)=f_m(\tau_M,\xi);$$
$$K\left(\tau_P,\tau_M,\cos\left(\varphi-\xi+\frac{2\pi(n-m)}{N}\right)\right)=K_{n-m}(\tau_P,\tau_M,\varphi-\xi);\ K_{-l}=K_{N-l}, \tag{24}$$

то система уравнений (23) запишется в виде:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\rho(\tau_P)h_\tau(\tau_P)d\tau_P\int_{0}^{\frac{2\pi}{N}}\sum_{n=1}^{N}\psi_n(\tau_P,\varphi)K_{n-m}(\tau_P,\tau_M,\varphi-\xi)d\varphi=f_m(\tau_M,\xi), \tag{25}$$

где $\alpha<\tau_M<\beta;\ 0<\xi<\frac{2\pi}{N};\ m\in[1,\ N]$.

Введем множитель $\omega_k=e^{i\frac{2\pi}{N}(k-1)}$, который обладает свойством $\omega_k^{-l}=\omega_k^{N-l}$. Умножим каждое из уравнений (25) на ω_k^{m-1} и просуммируем по "m" от 1 до N. Тогда получим:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\rho(\tau_P)h_\tau(\tau_P)d\tau_P\int_{0}^{\frac{2\pi}{N}}\sum_{n=1}^{N}\psi_n(\tau_P,\varphi)\sum_{m=1}^{N}\omega_k^{m-1}K_{n-m}(\tau_P,\tau_M,\varphi-\xi)d\varphi=$$
$$=\sum_{m=1}^{N}\omega_k^{m-1}f_m(\tau_M,\xi). \tag{26}$$

Покажем, что

$$U=\sum_{n=1}^{N}\psi_n\sum_{m=1}^{N}\omega_k^{m-1}K_{n-m}=\sum_{n=1}^{N}\omega_k^{n-1}\psi_n\sum_{l=0}^{N-1}K_l\omega_k^{N-l}. \tag{27}$$

Доказательство основано на свойствах функции ω_k и K_l:

$$\omega_k^{-l}=\omega_k^{N-l};\qquad K_{-l}=K_{N-l}. \tag{28}$$

Запишем U в виде:

$$U=\sum_{n=1}^{N}\omega_k^{n-1}\psi_n\sum_{m=1}^{N}\omega_k^{m-n}K_{n-m}=\sum_{n=1}^{N}\omega_k^{n-1}\psi_n\left(\sum_{m=1}^{n}K_{n-m}\omega_k^{m-n}+\sum_{m=n+1}^{N}K_{n-m}\omega_k^{m-n}\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\omega_k^{n-1}\psi_n\left(\sum_{m=1}^{n}K_{n-m}\omega_k^{N+m-n}+\sum_{m=n+1}^{N}K_{N+n-m}\omega_k^{m-n}\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\omega_k^{n-1}\psi_n\left(\sum_{l=n-1}^{0}K_l\omega_k^{N-l}+\sum_{l=N-1}^{n}K_l\omega_k^{N-l}\right)=\sum_{n=1}^{N}\omega_k^{n-1}\psi_n\sum_{l=0}^{N-1}\omega_k^{N-l}K_l\,.$$

Формула (27) доказана.

Введем обозначения

$$u_k\left(\tau_P,\varphi\right)=\sum_{n=1}^{N}\omega_k^{n-1}\psi_n\left(\tau_P,\varphi\right),\quad k\in[1,\ N],\tag{29}$$

$$Q_k\left(\tau_P,\tau_M,\varphi-\xi\right)=\sum_{l=1}^{N-1}\omega_k^{N-l}K_l\left(\tau_P,\tau_M,\varphi-\xi\right),\quad k\in[1,\ N].\tag{30}$$

Учитывая, согласно (27), что $U=u_k\cdot Q_k$, получим интегральное уравнение (26) в виде:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\rho\left(\tau_P\right)h_\tau\left(\tau_P\right)d\tau_P\int_{0}^{\frac{2\pi}{N}}u_k\left(\tau_P,\varphi\right)Q_k\left(\tau_P,\tau_M,\varphi-\xi\right)d\varphi=F_k\left(\tau_M,\xi\right),\tag{31}$$

где

$$F_k\left(\tau_M,\xi\right)=\sum_{m=1}^{N}\omega_k^{m-1}f_m\left(\tau_M,\xi\right);\qquad k\in[1,\ N].\tag{32}$$

Таким образом система интегральных уравнений (25) сведена к N независимым интегральным уравнениям (31). Решив интегральные уравнения (31) для $k\in[1,\ N]$ и определив $u_k\left(\tau_P,\varphi\right)$ при $k\in[1,\ N]$, найдем $\psi_n\left(\tau_P,\varphi\right)$ при $k\in[1,\ N]$ из системы алгебраических уравнений (29).

Описанный метод позволяет решать N уравнений по конгруэнтной составляющей вместо решения интегрального уравнения по всей поверхности вращения, которая в N раз больше, чем конгруэнтная составляющая. Отметим, что метод конгруэнтных составляющих переходит в метод клеточно-циркулянтной матрицы при $N=1$ и стремится к методу разложения по круговым гармоникам при больших N. Метод конгруэнтных составляющих является наиболее эффективным, так как выбором числа конгруэнтных составляющих N он настраивается на свойства задачи. При увеличении N экономим память ЭВМ, но увеличиваем число решаемых уравнений, т.е. для каждой задачи имеется оптимальное N. Отметим, что полученные интегральные уравнения по S_n независимы и имеют близкие по форме ядра, что позволяет применять параллельные вычислительные процессы и алгоритмы при формировании матриц и решения систем.

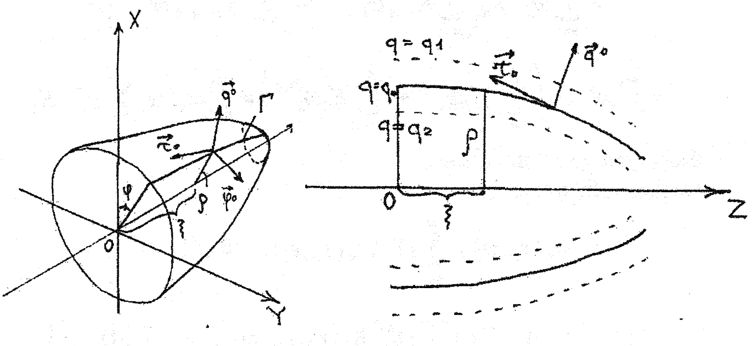

Рис. 1

Сравнение описанных подходов проводилось методом вычислительного эксперимента на модели незамкнутого кругового цилиндра. Расчёты подтвердили высокую эффективность метода конгруэнтных составляющих и возможность его адаптации к изменениям размеров поверхности, длины волны первичного поля и расположения источника.

Литература

1. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. – М.: Мир, 1964.
2. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. – М.: Мир, 1987.
3. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. – М.: Изд-во МГУ, 1987.
4. Захаров Е.В., Сафронов С.И., Тарасов Р.П. Метод интегральных уравнений в краевых задачах с коммутативной группой симметрий конечного порядка. – ДАН, 1990, т. 314, № 3, с. 589-593.
5. Захаров Е.В., Сафронов С.И., Тарасов Р.П. Метод численного решения интегральных уравнений в краевых задачах с абелевой группой симметрии конечного порядка. – ЖВМ и МФ, 1990, т. 30, № 11, с. 1661-1674.